Calcul algébrique

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes en détaillant votre démarche :

a. $2(x+5) = 3(2x-2)$ b. $2(x-2) - 4(1-x) = 4$

c. $3(x-2) + 4 = 2 - x$ d. $5(x+1) = 3(3-x)$

Correction 1

a. $2(x+5) = 3(2x-2)$

$$\begin{aligned}
2x+10 &= 6x-6\\
2x &= 6x-6-10\\
2x &= 6x-16\\
2x-6x &= 6x-16-6x\\
-4x &= -16\\
x &= \frac{-16}{-4}\\
x &= 4
\end{aligned}$$

Cette équation admet pour solution le nombre 4.

b. $2(x-2) - 4(1-x) = 4$

$$\begin{aligned}
2x-4-4+4x &= 4\\
6x-8 &= 4\\
6x-8+8 &= 4+8\\
6x &= 12\\
x &= \frac{12}{6}\\
x &= 2
\end{aligned}$$

Cette équation admet pour solution le nombre 2.

c. $3(x-2) + 4 = 2 - x$

$$\begin{aligned}
3x-6+4 &= 2-x\\
3x-2 &= 2-x\\
3x-2+2 &= 2-x+2\\
3x &= 4-x\\
3x+x &= 4-x+x\\
4x &= 4\\
x &= \frac{4}{4}\\
x &= 1
\end{aligned}$$

Cette équation admet pour solution le nombre 1.

d. $5(x+1) = 3(3-x)$

$$\begin{aligned}
5x+5 &= 9-3x\\
5x+5-5 &= 9-3x-5\\
5x &= 4-3x\\
5x+3x &= 4\\
8x &= 4\\
x &= \frac{4}{8}\\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Cette équation admet pour solution le nombre $\frac{1}{2}$.

Exercice 2

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(3x-1)(2x+1) + (5-x)(2x+1)$

b. $x(2-x) + (3x+1)(2-x)$

c. $(x+1)(x-1) - (2x+3)(x-1)$

d. $(3x+4)(2x-1) + 4(3x+4)$

e. $(2x+4)(3-3x) + (2x+4)$

f. $(x+1)(3-2x) + (3-2x)^2$

Correction 2

a. $(3x-1)(2x+1) + (5-x)(2x+1)$

$= (2x+1)\big[(3x-1)+(5-x)\big]$

$= (2x+1)(3x-1+5-x) = (2x+1)(2x+4)$

b. $x(2-x) + (3x+1)(2-x) = (2-x)\big[x+(3x+1)\big]$

$= (2-x)(4x+1)$

c. $(x+1)(x-1) - (2x+3)(x-1)$

$= (x-1)\big[(x+1)-(2x+3)\big]$

$= (x-1)(x+1-2x-3) = (x-1)(-x-2)$

$= (x-1)\big[-(x+2)\big] = -(x-1)(x+2)$

d. $(3x+4)(2x-1) + 4(3x+4)$

$= (3x+4)\big[(2x-1)+4\big] = (3x+4)(2x+3)$

e. $(2x+4)(3-3x) + (2x+4)$

$= (2x+4)(3-3x) + (2x+4)\times 1$

$= (2x+4)\big[(3-3x)+1\big] = (2x+4)(4-3x)$

f. $(x+1)(3-2x) + (3-2x)^2 = (3-2x)\big[(x+1)+(3-2x)\big]$

$= (3-2x)(x+1+3-2x) = (3-2x)(4-x)$

Exercice 3

Chacune des expressions suivantes est factorisable. Donner la forme factorisée de chacune d'elle :

a. $x^2 - 9$

b. $(2x+1)(3x-1) - (x+3)(6x-2)$

c. $(2x-1)^2 - 4(2-x)^2$

d. $(x-1)(3x+2) + (2x+3)(1-x)$

e. $(7x-1)(5x-6) - (10x-12)$

f. $9x^2 - 12x + 4 + (4-3x)(3x-2)$

Correction 3

a. $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$

b. $(2x+1)(3x-1)-(x+3)(6x-2)$
$$\begin{aligned} &= (2x+1)(3x-1)-(x+3)\big[2(3x-1)\big] \\ &= (2x+1)(3x-1)-2(x+3)(3x-1) \\ &= (3x-1)\big[(2x+1)-2(x+3)\big] \\ &= (3x-1)(2x+1-2x-6) = (3x-1)\times(-5) \\ &= -5(3x-1) \end{aligned}$$

c. $(2x-1)^2-4(2-x)^2 = (2x-1)^2-\big[2(2-x)\big]^2$
$$\begin{aligned} &= \big[(2x-1)+2(2-x)\big]\big[(2x-1)-2(2-x)\big] \\ &= \big[(2x-1+4-2x)\big(2x-1-4+2x\big) \\ &= 3(4x-5) \end{aligned}$$

d. $(x-1)(3x+2)+(2x+3)(1-x)$
$$\begin{aligned} &= (x-1)(3x+2)+(2x+3)\big[-(x-1)\big] \\ &= (x-1)(3x+2)-(2x+3)(x-1) \\ &= (x-1)\big[(3x+2)-(2x+3)\big] \\ &= (x-1)\big(3x+2-2x-3\big) \\ &= (x-1)(x-1) = (x-1)^2 \end{aligned}$$

e. $(7x-1)(5x-6)-(10x-12)$
$$\begin{aligned} &= (7x-1)(5x-6)-\big[2(5x-6)\big] \\ &= (7x-1)(5x-6)-2(5x-6) \\ &= (5x-6)\big[(7x-1)-2\big] = (5x-6)(7x-3) \end{aligned}$$

f. $9x^2-12x+4+(4-3x)(3x-2)$
$$\begin{aligned} &= (3x-2)^2+(4-3x)(3x-2) \\ &= (3x-2)\big[(3x-2)+(4-3x)\big] \\ &= (3x-2)\big(3x-2+4-3x\big) \\ &= (3x-2)\times 2 = 2(3x-2) \end{aligned}$$

Exercice 4

Factoriser les expressions suivantes :

a. $(x+2)^2+(3x+3)(x-1)$

b. $(x+1)(3x+2)+(3x-1)(2x+1)$

c. $(2x-1)^2-(3x+3)(x-5)$

d. $(3x+1)(4x+5)+(3x+4)(5-x)$

Correction 4

a. $(x+2)^2+(3x+3)(x-1)$
$$\begin{aligned} &= x^2+4x+4+3x^2-3x+3x-3 \\ &= 4x^2+4x+1 = (2x+1)^2 \end{aligned}$$

b. $(x+1)(3x+2)+(3x-1)(2x+1)$
$$\begin{aligned} &= 3x^2+2x+3x+2+6x^2+3x-2x-1 \\ &= 9x^2+6x+1 = (3x+1)^2 \end{aligned}$$

c. $(2x-1)^2-(3x+3)(x-5)$
$$\begin{aligned} &= 4x^2-4x+1-\big(3x^2-15x+3x-15\big) \\ &= 4x^2-4x+1-3x^2+15x-3x+15 \\ &= x^2+8x+16 = (x+4)^2 \end{aligned}$$

d. $(3x+1)(4x+5)+(3x+4)(5-x)$
$$\begin{aligned} &= 12x^2+15x+4x+5+15x-3x^2+20-4x \\ &= 9x^2+30x+25 = (3x+5)^2 \end{aligned}$$

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes :

a. $(2x-1)(3x+1)=0$ **b.** $(x-2)(2x+4)=0$

c. $(3-2x)x=0$ **d.** $(5x+1)(5+x)=0$

Correction 5

a. L'équation $(2x-1)(3x+1)=0$ est une équation produit :
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$2x-1=0$	$3x+1=0$
$2x=1$	$3x=-1$
$x=\dfrac{1}{2}$	$x=-\dfrac{1}{3}$

Cette équation admet pour solution les deux nombres $-\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$.

b. L'équation $(x-2)(2x+4)=0$ est une équation produit :
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$x-2=0$	$2x+4=0$
$x=2$	$2x=-4$
	$x=\dfrac{-4}{2}$
	$x=-2$

Cette équation admet pour solution les deux nombres -2 et 2.

c. L'équation $(3-2x)x=0$ est une équation produit :
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$3-2x=0$	$x=0$
$-2x=-3$	
$x=\dfrac{-3}{-2}$	
$x=\dfrac{3}{2}$	

Cette équation admet pour solution les deux nombres 0 et $\dfrac{3}{2}$.

d. L'équation $(5x+1)(5+x)=0$ est une équation produit :
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$$5x+1=0 \quad 5x=-1 \quad x=-\frac{1}{5}$$ $$5+x=0 \quad x=-5$$

Cette équation admet pour solution les deux nombres -5 et $-\frac{1}{5}$.

Exercice 6

Modifier les équations proposées afin d'obtenir des équations-produits nulles, puis les résoudre :

a. $81x^2-18x=-1$

b. $25x^2-9=0$

c. $(2x+1)^2=(2x+1)(3x-1)$

d. $16x^2+24x+9=(3x-2)^2$

Correction 6

a. $81x^2-18x=-1$

$81x^2-18x+1=0$

Factorisons avec la seconde identité remarquable :

$(9x-1)^2=0$

Un produit est nul si au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$$9x-1=0 \quad 9x=1 \quad x=\frac{1}{9}$$ $$9x-1=0 \quad 9x=1 \quad x=\frac{1}{9}$$

L'équation admet pour unique solution : $\frac{1}{9}$.

b. $25x^2-9=0$

$(5x)^2-3^2=0$

Factorisons avec la seconde identité remarquable :

$(5x+3)(5x-3)=0$

Un produit est nul si au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$$5x+3=0 \quad 5x=-3 \quad x=-\frac{3}{5}$$ $$5x-3=0 \quad 5x=3 \quad x=\frac{3}{5}$$

L'équation admet les deux nombres suivants pour solution : $-\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}$

c. $(2x+1)^2=(2x+1)(3x-1)$

$(2x+1)^2-(2x+1)(3x-1)=0$

$(2x+1)\big[(2x+1)-(3x-1)\big]=0$

$(2x+1)\big(2x+1-3x+1\big)=0$

$(2x+1)(-x+2)=0$

Un produit est nul si au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$$2x+1=0 \quad 2x=-1 \quad x=-\frac{1}{2}$$ $$-x+2=0 \quad -x=-2 \quad x=2$$

Cette équation admet pour solution les deux nombres suivants : $-\frac{1}{2}$; 2

d. $16x^2+24x+9=(3x-2)^2$

Factorisons avec la première identité remarquable :

$(4x+3)^2=(3x-2)^2$

$(4x+3)^2-(3x-2)^2=0$

$\big[(4x+3)+(3x-2)\big]\big[(4x+3)-(3x-2)\big]=0$

$\big(4x+3+3x-2\big)\big(4x+3-3x+2\big)=0$

$(7x+1)(x+5)=0$

Un produit est nul si au moins un de ses facteurs est nul.
On obtient les deux équations suivantes :

$$7x+1=0 \quad 7x=-1 \quad x=-\frac{1}{7}$$ $$x+5=0 \quad x=-5$$

Cette équation admet pour solution les deux nombres suivants : $-\frac{1}{7}$; -5

Exercice 7

1. Parmi les inéquations suivantes, lesquelles acceptent le nombre 9 comme solution :

a. $-3x+2 \geqslant 0$ b. $5(x+9)>0$

c. $\frac{x+1}{4} \geqslant -3\times\frac{x-2}{3}$ d. $2>x$

2. Résoudre les inéquations suivantes

a. $-3x+7 \leqslant x+2$ b. $-6x+1>0$

c. $-\frac{x}{4}<5$ d. $-3(x+5)<x+5$

e. $-3x+7\leqslant 9-x$ f. $\frac{x-1}{6}+\frac{x+1}{3}<2$

g. $x+\frac{x}{2}-\frac{x}{6}\leqslant\frac{x+1}{3}+\frac{2x-3}{6}$

Correction 7

1. a. 9 n'est pas solution de l'inéquation $-3x+2\geqslant 0$ car : $-3\times 9+2=-27+2=-25$

b. 9 est solution de l'inéquation $5\cdot(x+9)>0$ car : $5\cdot(9+9)=5\times 18=90$

c. 9 est solution de l'équation car :

- $\frac{9+1}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$
- $-3\times\frac{9-2}{3}=-7$

d. 9 n'est pas solution de l'inéquation de $2>x$.

2. a. $-3x+7\leqslant x+2$

$-4x\leqslant -5$

$x\geqslant\frac{-5}{-4}$

$x\geqslant\frac{5}{4}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{5}{4};+\infty\right[$.

b. $-6x+1>0$

$-6x>-1$

$x<\dfrac{-1}{-6}$

$x<\dfrac{1}{6}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{6}\right[$.

c. $-\dfrac{x}{4}<5$

$(-4)\times\left(-\dfrac{x}{4}\right)>(-4)\times 5$

$x>-20$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-20\,;+\infty[$.

d. $-3(x+5)<x+5$

$-3x-15<x+5$

$-4x<20$

$x>\dfrac{20}{-4}$

$x>-5$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-5\,;+\infty[$.

e. $-3x+7\leqslant 9-x$

$-2x+7\leqslant 9$

$-2x\leqslant 2$

$x\geqslant\dfrac{2}{-2}$

$x\geqslant -1$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

f. $\dfrac{x-1}{6}+\dfrac{x+1}{3}<2$

$6\times\left(\dfrac{x-1}{6}+\dfrac{x+1}{3}\right)<6\times 2$

$(x-1)+2\times(x+1)<12$

$x-1+2x+2<12$

$3x+1<12$

$3x<11$

$x<\dfrac{11}{3}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{11}{3}\right[$.

g. $x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{6}\leqslant\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{2x-3}{6}$

$6\times\left(x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{6}\right)\leqslant 6\times\left(\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{2x-3}{6}\right)$

$6x+3x-x\leqslant 2\times(x+1)+(2x-3)$

$8x\leqslant 2x+2+2x-3$

$8x\leqslant 4x-1$

$4x\leqslant -1$

$x\leqslant\dfrac{-1}{4}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{4}\right]$.

Exercice 8

Etablir le table de signe des expressions algébriques suivantes :

a. $(x+1)(2-x)$ b. $-(2x+4)(x-2)$ c. $(x+1)^2$

Correction 8

1. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(x+1)(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
-1		$-$	|	$-$	|	$-$	
$2x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-(2x+4)(x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$	

Exercice 9

1. Développer : $(x-1)(x-5)$

2. Résoudre : $\dfrac{(x-3)^2-4}{3-2x}<0$

Correction 9

1. On a le développement suivant :

$(x-1)(x-5)=x^2-5x-x+5$

$=x^2-6x+5$

2. On a les manipulations algébriques suivantes :

$\dfrac{(x-3)^2-4}{3-2x}<0$

$\dfrac{(x^2-6x+9)-4}{3-2x}<0$

$\dfrac{x^2-6x+5}{3-2x}<0$

D'après le résultat de la question 1. :

$\dfrac{(x-1)(x-5)}{3-2x}<0$

On a le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{(x-1)(x-5)}{3-2x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'inéquation a pour solution l'ensemble suivant :

$$\mathcal{S} = \left]1\,;\,\frac{3}{2}\right[\cup \left]5\,;\,+\infty\right[$$