Calcul littéral

Exercice 1

Développer puis réduire chacune des expressions suivantes :

a. $(x+1)(2x+1)$ b. $(3x+1)(2x+2)$

c. $(2x+1)(5-2x)$ d. $(3x-2)(1-x)$

e. $-(x+1)(2x-3)$ f. $2(1-x)(2-x)$

Correction 1

a. $(x+1)(2x+1) = 2x^2+x+2x+1 = 2x^2+3x+1$

b. $(3x+1)(2x+2) = 6x^2+6x+2x+2$
$= 6x^2+8x+2$

c. $(2x+1)(5-2x) = 10x-4x^2+5-2x$
$= -4x^2+8x+5$

d. $(3x-2)(1-x) = 3x-3x^2-2+2x = -3x^2+5x-2$

e. $-(x+1)(2x-3) = -(2x^2-3x+2x-3)$
$= -(2x^2-x-3) = -2x^2+x+3$

f. $2(1-x)(2-x) = 2(2-x-2x+x^2)$
$= 2(x^2-3x+2) = 2x^2-6x+4$

Exercice 2

Donner la forme développée et réduire des expressions suivantes :

a. $(3x+2)^2$ b. $(2-5x)^2$

c. $(3x+1)(3x-1)$ d. $(5x+1)(3-x)-3(1-x)$

Correction 2

a. $(3x+2)^2 = (3x)^2+2\times3x\times2+2^2 = 9x^2+12x+4$

b. $(2-5x)^2 = 2^2-2\times2\times5x+(5x)^2 = 4-20x+25x^2$

c. $(3x+1)(3x-1) = (3x)^2-1^2 = 9x^2-1$

d. $(5x+1)(3-x)-3(1-x)$
$= (15x-5x^2+3-x)-(3-3x)$
$= 15x-5x^2+3-x-3+3x = -5x^2+17x$

Exercice 3

Développer et simplifier les expressions suivantes :

a. $(4x+3)^2$ b. $(4x-2)^2-2(x+2)$

c. $(3x-2)(3x+2)$

d. $(2x+1)(2x-1)+4\times\big[2+3(x+1)\big]$

Correction 3

a. $(4x+3)^2 = (4x)^2+2\times4x\times3+3^2$
$= 16x^2+24x+9$

b. $(4x-2)^2-2(x+2) = (16^2-16x+4)-(2x+4)$
$= 16x^2-16x+4-2x-4 = 16x^2-14x$

c. $(3x-2)(3x+2) = (3x)^2-2^2$
$= 9x^2-4$

d. $(2x+1)(2x-1)+4\times\big[2+3(x+1)\big]$
$= (4x^2-1)+4\times(2+3x+3)$
$= (4x^2-1)+4\times(3x+5) = 4x^2-1+12x+20$
$= 4x^2+12x+19$

Exercice 4

Factoriser les expressions suivantes :

a. $9x^2-42x+49$ b. $4x^4-9$

c. $25x^2+30x+9$ d. $(5x+1)(3\text{-}2x)-(5x+1)(2x+1)$

e. $(x+1)(2x\text{-}1)-(2x\text{-}1)$ f. $(2x-1)^2+(2x-1)(3x+1)$

Correction 4

a. Cette expression s'identifie avec la seconde identité remarquable et permet de considérer le développement suivant :
$(3x-7)^2 = (3x)^2-2\times3x\times7+7^2 = 9x^2-42x+49$

Ainsi, on a la factorisation suivante :
$9x^2-42x+49 = (3x-7)^2$

b. Cette expression s'identifie avec la troisième identité remarquable et permet d'obtenir la factorisation suivante :
$4x^4-9 = \big(2x^2\big)^2-3^2 = (2x^2+3)(2x^2-3)$

c. Cette expression s'identifie avec la première identité remarquable et permet de considérer le développement suivant :
$(5x+3)^2 = (5x)^2+2\times5x\times3+3^2 = 25x^2+30x+9$

Ainsi, on a la factorisation suivante :
$25x^2+30x+9 = (5x+3)^2$

d. On remarque que l'expression $(5x+1)$ est un facteur commun aux deux termes de cette différence.
Ainsi, on a la factorisation suivante :
$(5x+1)(3-2x)-(5x+1)(2x+1)$
$= (5x+1)\big[(3-2x)-(2x+1)\big]$
$= (5x+1)(3-2x-2x-1)$
$= (5x+1)(2-4x)$

e. En écrivant l'expression sous la forme :
$(x+1)(2x-1)-(2x-1)$
$= (x+1)(2x-1)-(2x-1)\times1$
L'expression $(2x-1)$ est un facteur commun aux deux termes :
$= (2x-1)\big[(x+1)-1\big]$
$= (2x-1)x$

f. L'expression $(2x-1)$ est un facteur commun aux deux termes de cette somme ; ainsi, on a la factorisation à l'aide de la distributivité :
$(2x-1)^2+(2x-1)(3x+1)$
$= (2x-1)\big[(2x-1)+(3x+1)\big] = (2x-1)5x$

Exercice 5

On considère l'expression :

$D = (2x+3)^2 + (x-5)(2x+3)$

1. Développer et réduire l'expression D.
2. Factoriser l'expression D.
3. Evaluer l'expression pour $x=1$ et $x=\dfrac{2}{3}$.

Correction 5

1. Le développement de l'expression donne :

$$\begin{aligned} D &= (2x+3)^2 + (x-5)(2x+3) \\ &= (4x^2+12x+9) + (2x^2+3x-10x-15) \\ &= 6x^2+5x-6 \end{aligned}$$

2. La forme factorisée de l'expression est :

$$\begin{aligned} D &= (2x+3)^2 + (x-5)(2x+3) \\ &= (2x+3)\big[(2x+3)+(x-5)\big] = (2x+3)(3x-2) \end{aligned}$$

3.
- Pour évaluer l'expression D pour la valeur $x=1$, nous allons utiliser la forme développer et réduite :

$$\begin{aligned} D &= (2\times1+3)^2 + (1-5)(2\times1+3) \\ &= 5^2 - 4\times5 = 25-20 = 5 \end{aligned}$$

- Pour évaluer l'expression D pour la valeur $x=\dfrac{2}{3}$, nous allons utiliser la forme factorisée :

$$D = \Big(2\times\frac{2}{3}+3\Big)\Big(3\times\frac{2}{3}-2\Big) = \Big(2\times\frac{2}{3}+3\Big)\times0 = 0$$

Exercice 6

1. Développer les expressions suivante :

a. $2(3x-1)(2-x)$ b. $(2x+3)^2$

c. $(3x-2)(3x+2)$ d. $(5x-6)^2$

2. Factoriser les expressions suivantes :

a. $(x+1)(1-x)-(x+1)(2x+1)$

b. $3(2x-2)+(x+1)(1-x)$

c. $2x(x+1)+(x+1)(x^2+1)$

d. $12x^2-6x+(2x-1)(5-2x)$

Correction 6

1. a. $2(3x-1)(2-x) = (6x-2)(2-x)$

$$\begin{aligned} &= 12x-6x^2-4+2x \\ &= -6x^2+14x-4 \end{aligned}$$

b. $(2x+3)^2 = 4x^2+12x+9$

c. $(3x-2)(3x+2) = (3x)^2-2^2 = 9x^2-4$

d. $(5x-6)^2 = (5x)^2 - 2\times5x\times6 + 6^2$

$$= 25x^2-60x+36$$

2. a. $(x+1)(1-x)-(x+1)(2x+1)$

$$\begin{aligned} &= (x+1)\big[(1-x)-(2x+1)\big] \\ &= (x+1)(1-x-2x-1) = (x+1)(-3x) \\ &= -3x(x+1) \end{aligned}$$

b. $3(2x-2)+(x+1)(1-x)$

$$\begin{aligned} &= 3\big[2(x-1)\big] + (x+1)\big[-(x-1)\big] \\ &= 6(x-1)-(x+1)(x-1) \\ &= (x-1)\big[6-(x+1)\big] = (x-1)(6-x-1) \\ &= (x-1)(5-x) \end{aligned}$$

c. $2x(x+1)+(x+1)(x^2+1) = (x+1)\big[2x+(x^2+1)\big]$

$$= (x+1)(x^2+2x+1) = (x+1)(x+1)^2$$

d. $12x^2-6x+(2x-1)(5-2x)$

$$\begin{aligned} &= 6x(2x-1)+(2x-1)(5-2x) \\ &= (2x-1)\big[6x+(5-2x)\big] = (2x-1)(4x+5) \end{aligned}$$