Entrainement sur les SUITES

Exercice 1

Compléter les suites logiques de nombres pour obtenir les 8 premiers termes de chacune d'elles :

a. 4 - 7 - 10 - 13 - ...

b. 3 - 6 - 12 - 24 - ...

c. 20 - 19 - 17 - 14 - ...

d. 5 - 7 - 11 - 17 - ...

e. 1 - 4 - 9 - 16 - ...

Correction 1

a.	4	7	10	13	16	19	22	25
b.	3	6	12	24	48	96	192	384
c.	20	19	17	14	10	5	-1	-8
d.	5	7	11	17	25	35	47	61
e.	1	4	9	16	25	36	49	64

Exercice 2

On considère les deux suites de nombres ci-dessous dont on donne les sept premiers termes :

a. 3 ; 5 ; 7 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16

b. 6 ; 3,5 ; 1 ; -1,5 ; -4 ; -6,5 ; -9

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite arithmétique ?
Si oui, donner le premier terme et la raison. Si non, justifier votre rejet de cette affirmation.

Correction 2

a. Notons (u_n) cette suite de nombres.
On a :
$u_1 = 5$; $u_2 = 7$; $u_3 = 10$

On remarque les relations :
$u_2 = u_1 + 2$; $u_3 = u_2 + 3$

On ne passe pas d'un terme à l'autre en additionnant le même nombre : la suite (u_n) n'est pas une suites arithmétique.

b. On remarque que pour passer d'un terme à l'autre, on ajoute toujours $-2{,}5$: les premiers termes permettent de conjecturer que cette suite est une suite arithmétique de raison $-2{,}5$.

Exercice 3

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) arithmétique de premier terme 2 et de raison 3.

2. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n) arithmétique de premier terme 3 et de raison $-\dfrac{3}{2}$.

Correction 3

1. La suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 3 est définie par les deux relations :
$u_0 = 2$; $u_{n+1} = u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = 2$
- $u_1 = u_0 + r = 2 + 3 = 5$
- $u_2 = u_1 + r = 5 + 3 = 8$
- $u_3 = u_2 + r = 8 + 3 = 11$
- $u_4 = u_3 + r = 11 + 3 = 14$

2. La suite arithmétique (v_n) de premier terme 3 et de raison $-\dfrac{3}{2}$ est définie par les deux relations :
$v_0 = 3$; $v_{n+1} = v_n - \dfrac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Voici les cinq premiers termes de la suite (v_n) :

- $v_0 = 3$
- $v_1 = v_0 + r = 3 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{6}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$
- $v_2 = v_1 + r = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} = 0$
- $v_3 = v_2 + r = 0 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{2}$
- $v_4 = v_3 + r = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{6}{2} = -3$

Exercice 4

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) géométrique de premier terme 2 et de raison 3.

2. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) géométrique de premier terme 3 et de raison $-\dfrac{3}{2}$.

Correction 4

1. La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3, elle est définie par les relations :
$u_0 = 2$; $u_{n+1} = 3 \cdot u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Voici les quatre premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = 2$
- $u_1 = u_0 \times q = 2 \times 3 = 6$
- $u_2 = u_1 \times q = 6 \times 3 = 18$
- $u_3 = u_2 \times q = 18 \times 3 = 54$

2. La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme 3 et de raison $-\dfrac{3}{2}$, elle est définie par les relations :
$v_0 = 3$; $v_{n+1} = -\dfrac{3}{2} \cdot v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Voici les quatre premiers termes de la suite (v_n) :

- $v_0 = 3$
- $v_1 = q \times v_0 = -\dfrac{3}{2} \times 3 = -\dfrac{9}{2}$
- $v_2 = q \times v_1 = -\dfrac{3}{2} \times \left(-\dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{27}{4}$
- $v_3 = q \times v_2 = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{27}{4} = -\dfrac{81}{8}$

Exercice 5

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q. Compléter les expressions suivantes :

a. $u_7 = u_3 \times \ldots$ b. $u_{25} = u_{11} \times \ldots$

c. $u_3 = u_8 \times \ldots$ d. $u_{15} = u_{23} \times \ldots$

Correction 5

a. $u_7 = u_3 \times q^4$ b. $u_{25} = u_{11} \times q^{14}$

c. $u_3 = u_8 \times q^{-5}$ d. $u_{15} = u_{23} \times q^{-8}$

Exercice 6

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmétique de premier terme 3 et de raison -2.

1. Déterminer la valeur des termes u_{12} et u_{43}.

2. Déterminer la valeur du rang n réalisant les égalités :

 a. $u_n = -21$ b. $u_n = -57$

Correction 6

1.
 - Le terme de rang 12 s'exprime par la relation :
 $u_{12} = u_0 + 12 \cdot r = 3 + 12 \times (-2) = 3 - 24 = -21$
 - Le terme de rang 43 s'exprime par la relation :
 $u_{43} = u_0 + 43 \cdot r = 3 + 43 \times (-2) = 3 - 86 = -83$

2. a. On a la relation :

$$u_n = -21$$

Le terme de rang n s'exprime par :

$$\begin{aligned} u_0 + n \cdot r &= -21 \\ 3 + n \times (-2) &= -21 \\ -2 \cdot n &= -21 - 3 \\ -2 \cdot n &= -24 \\ n &= \frac{-24}{-2} \\ n &= 12 \end{aligned}$$

Ainsi, c'est le terme de rang 12 qui a pour valeur -21.

b. On a la relation :

$$u_n = -57$$

Le terme de rang n s'exprime par :

$$\begin{aligned} u_0 + n \cdot r &= -57 \\ 3 + n \times (-2) &= -57 \\ -2 \cdot n &= -57 - 3 \\ -2 \cdot n &= -60 \\ n &= \frac{-60}{-2} \\ n &= 30 \end{aligned}$$

Ainsi, c'est le terme de rang 30 qui a pour valeur -57.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. Pour chacune des sommes suivantes, préciser son nombre de termes :

a. $u_0 + u_1 + \cdots + u_{32}$ b. $u_5 + u_6 + \cdots + u_{15}$

c. $u_0 + u_1 + \cdot + u_n$ d. $u_5 + u_6 + \cdots + u_n$

e. $u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{100}$ f. $u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n$

g. $u_0 + u_2 + \cdots + u_{88}$ h. $u_{3k} + u_{3k+3} + \cdots + u_{99}$

i. $\sum_{k=0}^{64} u_k$ j. $\sum_{k=5}^{16} u_{2k}$

Correction 7

a. $u_0 + u_1 + \cdots + u_{32}$
Cette somme comporte : $32 - 0 + 1 = 33$ termes

b. $u_5 + u_6 + \cdots + u_{15}$
Cette somme comporte : $15 - 5 + 1 = 11$ termes

c. $u_0 + u_1 + \cdot + u_n$
Cette somme comporte $n+1$ termes.

d. $u_5 + u_6 + \cdots + u_n$
Cette somme comporte $n-4$ termes.

e. $u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{100}$
Cette somme comporte $101-k$ termes.

f. $u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n$
Cette somme comporte $n-k+1$ termes.

g. La somme :
$u_0 + u_2 + \cdots + u_{88}$
peut s'écrire :
$u_{2\times 0} + u_{2\times 1} + \cdots + u_{2\times 44}$
Cette somme comporte 45 termes.

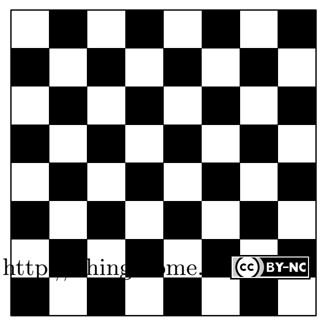
h. La somme :
$u_{3k} + u_{3k+3} + \cdots + u_{99}$
peut s'écrire :
$u_{3k} + u_{3(k+1)} + \cdots + u_{3\times 33}$
Cette somme comporte $34-k$ termes.

i. $\sum_{k=0}^{64} u_k$: cette somme comporte 65 termes.

j. $\sum_{k=5}^{16} u_{2k}$: cette somme comporte 12 termes.

Exercice 8

Le prince demande à Sissou de commencer par déposer un grain de riz sur la première case, puis trois grains sur la deuxième case, puis cinq grains sur la troisième case et ainsi de suite pour remplir l'échiquier représenté ci-contre.



Déterminer le nombre de grains de riz dont aura besoin Sissou

Correction 8

Ainsi, Sissou va déposer 1, puis 3, puis 5, puis 7...
Le nombre de grains de riz déposé sur chaque casier correspondra à une progression arithmétique représentée par une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.
Notons (u_n) cette suite.

L'échiquier comportant 64 cases, Pour avoir le nombre de grains total, on additionnera les 64 premiers termes de cette suite : c'est à dire du rang 0 au rang 63.

On a les valeurs :

$u_0 = 1$

$u_{63} = 1+63\times 2 = 1+126 = 127$

Ainsi, la somme de ses 64 premiers termes a pour valeur :

$$S = \frac{64\times\big(u_0+u_{63}\big)}{2} = \frac{64\times\big(1+127\big)}{2} = 32\times 128 = 4096$$

Ainsi, il faudra 4096 grains de riz pour recouvrir chacune des cases de cet échiquier.

Exercice 9

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{1}{2}$
   a. Calculer la somme des 13 premiers termes de (u_n) :
   $S = u_0+u_1+\cdots+u_{11}+u_{12}$
   b. Calculer la somme des termes de (u_n) allant de u_5 à u_{20} : $S' = u_5+u_6+\cdots+u_{19}+u_{20}$
2. On considère les deux sommes suivantes :
$$S_1 = 1+\frac{5}{2}+4+\frac{11}{2}+\cdots+100$$
$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}+\cdots+\frac{16\sqrt{3}}{3}$$
   a. Déterminer les caractéristiques des suites arithmétiques (v_n) et (w_n) définissant respectivement les termes des sommes S_1 et S_2.
   b. En déduire la valeur des sommes S_1 et S_2.

Correction 9

1. a. S est la somme de 13 termes consécutifs de la suite (u_n) dont le premier terme est u_0 et le dernier terme de la somme est u_{12}. Hors :
$$u_{12} = 2+12\times\frac{1}{2} = 8$$
La formule de la somme des termes d'une suite arithmétique donne :
$$S = \frac{\big(u_0+u_{12}\big)\times 13}{2} = \frac{(2+8)\times 13}{2} = 65$$
   b. On a les deux valeurs suivantes :
$$u_5 = 2+5\times\frac{1}{2} = \frac{9}{2} \quad ; \quad u_{20} = 2+20\times\frac{1}{2} = 12$$
S' est la somme de 16 termes consécutifs de la suite (u_n). La formule de la somme des termes d'une suite arithmétique permet d'écrire :
$$S' = \frac{\big(u_5+u_{20}\big)\times 16}{2} = \frac{\Big(\frac{9}{2}+12\Big)\times 16}{2} = \frac{\frac{33}{2}\times 16}{2} = \frac{33\times 8}{2} = 132$$
2. a. On fait les remarques suivantes :
   - Les termes de S_1 sont les premiers termes d'une suite arithmétique (v_n) de premier terme 1 et de raison $\dfrac{3}{2}$.
   - Les termes de la somme S'_2 sont les premiers termes d'une suite arithmétique (w_n) de premier terme $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

   b. - Déterminons le rang du terme de la suite (v_n) valant 100 :
$$\begin{aligned} v_n &= 100 \\ 1+\frac{3}{2}\times n &= 100 \\ \frac{3}{2}\times n &= 99 \\ n &= 99\times\frac{2}{3} \\ n &= 66 \end{aligned}$$
On en déduit que la somme S_1 est la somme des 67 premiers termes de la suite (v_n). On en déduit la valeur de la somme :
$$S_1 = \frac{\big(u_0+u_{66}\big)\times 67}{2} = \frac{\big(1+100\big)\times 67}{2} = \frac{6767}{2}$$
   - Déterminons le rang du terme de la suite (w_n) valant $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$:
$$\begin{aligned} w_n &= \frac{16\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot n &= \frac{16\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\times\big(1+n\big) &= \frac{16\sqrt{3}}{3} \\ 1+n &= \frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \\ 1+n &= \frac{16\sqrt{3}}{3}\times\frac{3}{\sqrt{3}} \\ n+1 &= 16 \\ n &= 15 \end{aligned}$$
Ainsi, S_2 est la somme des 16 termes de la suite arithmétique (w_n). On en déduit la valeur de la somme
$$S_2 = \frac{\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{16\sqrt{3}}{3}\Big)\times 16}{2} = \frac{\frac{17\sqrt{3}}{3}\times 8}{1} = \frac{136}{3}\cdot\sqrt{3}$$

Exercice 10

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{1}{2}$.
   a. Déterminer la somme de ses 10 premiers termes :
   $S = u_0+u_1+\cdots+u_8+u_9$
   b. Déterminer la somme des termes de la suite (u_n) allant de u_4 à u_{22} :

$$S' = u_4 + u_5 + \cdots + u_{21} + u_{22}$$

2. On considère la somme numérique suivantes :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Déterminer la valeur de S_n en fonction de n.

3. Soit S_3 la somme numérique suivante :

$$S_3 = 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \cdots + 8\sqrt{2}$$

   a. Donner les caractéristiques de la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la somme des premiers termes est S_3.

   b. En déduire la valeur de S_3.

Correction 10

1. a. S est la somme des 10 premiers termes de la suite de la suite géométrique (u_n) de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{2}$. La formule de la somme des termes d'une suite géométrique donne :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = u_0 \cdot \frac{1 - q^{10}}{1 - q}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)$$

   b. La somme S' représente la somme de 19 termes de la suite (v_n) en commençant par le terme de rang u_4 dont la valeur est :

$$u_4 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

D'après la formule de la somme des termes d'une suite géométriques, on a :

$$S' = u_4 + u_5 + \cdots + u_{22} = u_4 \cdot \frac{1 - q^{19}}{1 - q}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}}{\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{19}}}{4}$$

2. a. S_n est la somme des $(n+1)$ termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$, ainsi, on peut écrire :

$$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

   b. On a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 2^{n+1} = +\infty \implies \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$

$$\lim_{n\mapsto+\infty} S_n = \lim_{n\mapsto+\infty} 2\cdot\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 \times 1 = 2$$

3. S_3 est la somme de termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\sqrt{2}$.

Déterminons le rang du dernier terme de cette somme :

$$\begin{aligned}
w_n &= 8\sqrt{2} \\
1 \times \left(\sqrt{2}\right)^n &= 8\sqrt{2} \\
\left(\sqrt{2}\right)^n &= 2^3\sqrt{2} \\
\left(\sqrt{2}\right)^n &= \left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^3\sqrt{2} \\
\left(\sqrt{2}\right)^n &= \left(\sqrt{2}\right)^6 \times \sqrt{2} \\
\left(\sqrt{2}\right)^n &= \left(\sqrt{2}\right)^7 \\
n &= 7
\end{aligned}$$

Ainsi, $8\sqrt{2}$ est le terme rang 7 de cette suite : la somme S est donc la somme des 8 premiers termes de cette suite. On obtient :

$$S = 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \cdots + 8\sqrt{2}$$

$$= w_0 + w_1 + \cdots + w_7 = 1 \times \frac{1 - \left(\sqrt{2}\right)^8}{1 - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 - 16}{1 - \sqrt{2}} = \frac{-15}{1 - \sqrt{2}} = \frac{-15\cdot\left(1 + \sqrt{2}\right)}{\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{-15\cdot\left(1 + \sqrt{2}\right)}{1^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{-15\cdot\left(1 + \sqrt{2}\right)}{1 - 2} = \frac{-15\cdot\left(1 + \sqrt{2}\right)}{-1}$$

$$= 15\cdot\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Exercice 11

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$u_0 = 8 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5 \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$v_n = u_n + 10$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a. Montrer que la suite (v_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot v_n$$

   b. Donner la nature de la suite (v_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.

   c. Donner la formule explicite donnant l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.

2. Déduire des questions précédentes, la formule explicite de la suite (u_n).

Correction 11

1. a. On a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 10 = \frac{1}{2}u_n - 5 + 10 = \frac{1}{2}u_n + 5$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_n + 10\right) = \frac{1}{2}v_n$$

   b. La suite (v_n) est géométrique puisque pour passer d'un terme à son successeur, il faut multiplier par un même nombre.

   Le premier terme de la suite (v_n) est :

$$v_0 = u_0 + 10 = 8 + 10 = 18$$

   c. Puisque (v_n) est la suite géométrique de premier terme 18 et de raison $\frac{1}{2}$, on en déduit que le terme de rang n s'écrit :

$$v_n = v_0 \times q^n = 18\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2. D'après la relation définissant le terme v_n en fonction de u_n, on obtient :

$$\begin{aligned}
v_n &= u_n + 10 \\
u_n &= v_n - 10 \\
u_n &= 18\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n - 10
\end{aligned}$$