Entrainement Second Degré (J. Mahboub juin 2017)

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par la relation algébrique :

$$f(x) = 4x^2 + 4x - 3$$

1. a. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = (2x-1)(2x+3)$

   b. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = (2x+1)^2 - 4$

2. Pour chacune des questions suivantes, utiliser la forme la plus adaptée :

   a. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.

   b. Sachant que le carré d'un nombre est toujours positif ou nul, établir que la fonction f est minorée par -4.

   c. Déterminer le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   d. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant 5$.

Correction 1

1. a. On a :

$$(2x-1)(2x+3) = 4x^2 + 6x - 2x - 3 = 4x^2 + 4x - 3 = f(x)$$

   b. On a :

$$(2x+1)^2 - 4 = 4x^2 + 4x + 1 - 4 = 4x^2 + 4x - 3 = f(x)$$

2. a. Les antécédents de 0 sont les nombres de l'ensemble de définition de f dont l'image vaut 0 ; pour déterminer l'ensemble des antécédents de la foncion f, on résoud l'équation suivante :

$$f(x) = 0$$
$$(2x-1)(2x+3) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$2x - 1 = 0 \qquad 2x+3 = 0$$
$$2x = 1 \qquad 2x = -3$$
$$x = \frac{1}{2} \qquad x = -\frac{3}{2}$$

L'ensemble des antécédents du nombre 0 est :

$$S = \left\{-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right\}$$

   b. Le carré d'un nombre étant positif, on a :

$$(2x+1)^2 \geqslant 0$$
$$(2x+1)^2 - 4 \geqslant -4$$
$$f(x) \geqslant -4$$

La fonction f est minorée par -4.

   c. Pour étudier le signe de la fonction f, nous allons utiliser son expression factoriser ; il est plus facile d'étudier le signe de son produit :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-1)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   d. Résolvons l'inéquation $f(x) \geqslant 5$:

$$f(x) \geqslant 5$$
$$(2x+1)^2 - 4 \geqslant 5$$
$$(2x+1)^2 - 9 \geqslant 0$$
$$\big[(2x+1)+3\big]\big[(2x+1)-3\big] \geqslant 0$$
$$(2x+4)(2x-2) \geqslant 0$$

Construisons le tableau de signe de l'expression du membre de gauche :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+4)(2x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 5$ est :

$$S = \big]-\infty ; -2\big] \cup \big[1 ; +\infty\big[$$

Exercice 2

Déterminer les racines, sous forme simplifiée, des polynômes suivants :

a. $2x^2 - 3x - 9$ b. $5x^2 - 8x + 5$

c. $2x^2 - 8x + 8$ d. $x^2 + 2x - 1$

Correction 2

a. Le polynôme $2x^2 - 3x - 9$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-9) = 9 + 72 = 81$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-3) - 9}{2 \times 2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-3) + 9}{2 \times 2} = \frac{12}{4} = 3$$

b. Le polynôme $5x^2 - 8x + 5$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-8)^2 - 4 \times 5 \times 5 = 64 - 100 = -36$$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement négatif, il n'eadmet aucune racine.

c. Le polynôme $2x^2 - 8x + 8$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 64 - 64 = 0$$

Le discriminant étant nul, ce polynôme admet une unique racine dont la valeur est :

$$x_1 = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{-8}{2 \times 2} = 2$$

d. Le polynôme x^2+2x-1 admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2-4\times1\times(-1) = 4+4 = 8$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{2{\cdot}(-1-\sqrt{2})}{2} = -1-\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{2{\cdot}(-1+\sqrt{2})}{2} = -1+\sqrt{2}$$

Exercice 3

1. Factoriser les expressions suivantes :

a. $2x^2-3x-2$ b. $12x^2-12x+3$

2. Simplifier la fraction rationnelle suivante :
$$\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$$

Correction 3

1. a. Le polynôme $2x^2-3x-2$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-3)^2-4\times2\times(-2) = 9+16 = 25$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$
Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)-5}{2\times2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)+5}{2\times2} = \frac{8}{4} = 2$$

Ainsi, ce polynôme admet pour forme factorisée :
$$2x^2-3x-2 = 2\Big[x-\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big](x-2)$$
$$= 2\Big(x+\frac{1}{2}\Big)(x-2) = (2x+1)(x-2)$$

b. Le polynôme $12x^2-12x+3$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-12)^2-4\times12\times3 = 144-144 = 0$

Le discriminant étant nul, on en déduit que ce polynôme admet une unique racine :
$$x_1 = -\frac{b}{2{\cdot}1} = -\frac{-12}{2\times12} = \frac{1}{2}$$
Ainsi, ce polynôme admet la forme ffactorisée suivante :
$$12x^2-12x+3 = 12{\cdot}\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2 = 3\times2^2{\cdot}\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2$$
$$= 3{\cdot}\Big[2\times\Big(x-\frac{1}{2}\Big)\Big]^2 = 3{\cdot}(2x-1)^2$$

2. Le polynôme du numérateur admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2-4\times1\times(-2) = 1+8 = 9$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-1)-3}{2\times1} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-1)+3}{2\times1} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ce polynôme admet la factorisation suivante :
$x^2-x-2 = \big[x-(-1)\big](x-2) = (x+1)(x-2)$

En utilisant la factorisation obtenue à la question 1. a. , on obtient la simplification suivante du quotient :
$$\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(2x+1)(x-2)} = \frac{x+1}{2x+1}$$

Exercice 4

On considère la fonction polynome P de degré 3 définie par :
$P(x) = 3x^3+x^2-8x+4$

1. Déterminer les valeurs de a, b, c tel que :
$P(x) = (x+2)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$

2. En déduire l'ensemble des zéros du polynôme P.

Correction 4

1. Donnons la forme développée et de l'expression suivante :
$$\begin{aligned}&(x+2)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)\\ &= (a{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2+c{\cdot}x)+(2a{\cdot}x^2+2b{\cdot}x+2c)\\ &= a{\cdot}x^3+(b+2a){\cdot}x^2+(c+2b){\cdot}x+2c\end{aligned}$$
En identifiant terme à terme la forme réduite obtenue précédemment et l'expression de P, on remarque que les valeurs de a, b, c doivent vérifier la relation suivante :
$$\begin{cases} a = 3 \\ b+2a = 1 \\ c+2b = -8 \\ 2c = 4 \end{cases}$$
En résolvant ce système, on obtient :
$a=3$; $b=-5$; $c=2$

Ainsi, on obtient l'égalité suivante :
$P(x) = (x+2)(3x^2-5x+2)$

2. Cherchons les racines du polynome $3x^2-5x+2$; ce trinôme a un discrimant valant :
$\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4\times3\times2 = 25-24 = 1$

Ainsi, il admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{6} = 1$$

Il est maintenant possible d'exprimer $P(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du premier degré :

$$P(x) = (x+2)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1)$$

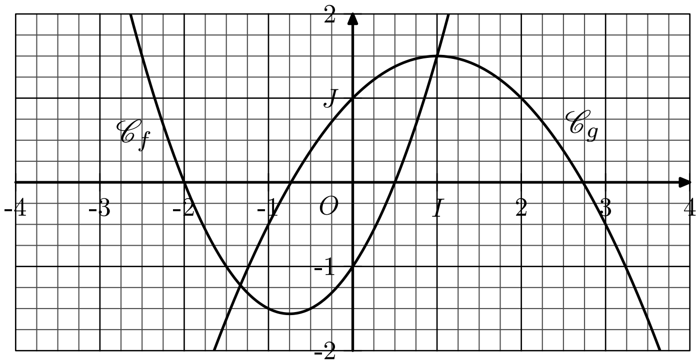
En utilisant la propriété "*Un produit est nul, si et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul*", on obtient l'ensemble des zéros du polynôme P :

$$S = \left\{-2\,;\frac{2}{3}\,;1\right\}$$

Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}\cdot x - 1 \quad ; \quad g(x) = -\frac{1}{2}\cdot x^2 + x + 1$$



On répondra algébriquement aux questions ci-dessous :

1. Déterminer les zéros des fonctions f et g.
2. Déterminer, algébriquement, la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Correction 5

1. a. Déterminons les zéros de la fonction f. L'image d'un nombre x par la fonction f est définie par le polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\times 1\times(-1) = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{2\times 1} = \frac{-\frac{8}{2}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{2\times 1} = \frac{\frac{2}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

b. Déterminons les zéros de la fonction f. L'image d'un nombre x par la fonction g a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 1^2 - 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1 = 1 + 2 = 3$$

Le discriminant étant strictement positif, cette fonction admet les deux zéros suivant :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1-\sqrt{3}}{-1} = 1+\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1+\sqrt{3}}{-1} = 1-\sqrt{3}$$

2. Pour étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, nous sommes emmenés à étudier la différence $f-g$.

On a les manipulations algébriques suivantes :

$$f(x) - g(x) = x^2 + \frac{3}{2}\cdot x - 1 - \left(-\frac{1}{2}\cdot x^2 + x + 1\right)$$

$$= x^2 + \frac{3}{2}\cdot x - 1 + \frac{1}{2}\cdot x^2 - x - 1$$

$$= \frac{3}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x - 2$$

Ce polynôme du second degré a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\times\frac{3}{2}\times(-2) = \frac{1}{4} + 12 = \frac{49}{4}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$

Le discriminant étant positive, on a les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{8}{2}}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{\frac{6}{2}}{3} = 1$$

Le coefficient du terme du second degré du polynôme définisant la différence $f-g$ étant positif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$:

- Sur chacun des deux intervalles $\left]-\infty\,;-\frac{4}{3}\right]$ et $[1\,;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.
- Sur l'intervalle $\left[-\frac{4}{3}\,;1\right]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

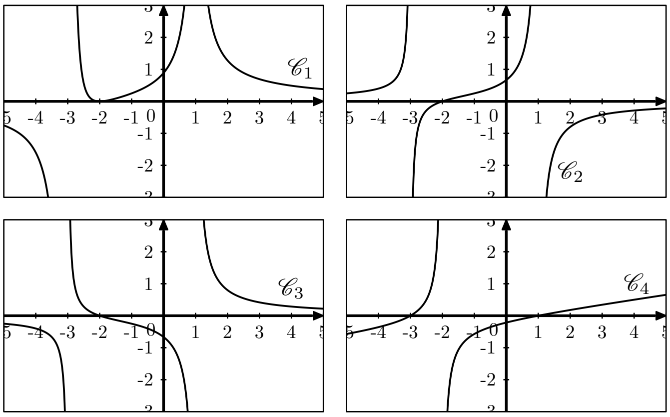
Exercice 6

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est donnée par la relation :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x-3}$$

1. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant 0$

2. Parmi les quatre courbes ci-dessous, une seule est la courbe représentative de la fonction f. Laquelle ?



Correction 6

1. La fonction f est définie par un quotient dont le dénominateur est défini par un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2 - 4{\times}1{\times}(-3) = 4 + 12 = 16$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

Ce discriminant étant strictement positif, le dénominateur s'annule pour les deux valeurs suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2-4}{2{\times}1} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2+4}{2{\times}1} = \frac{2}{2} = 1$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on obtient le signe du dénominateur. Voici le tableau de signe de la fonction f :

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+2}{x^2+2x-3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette inéquation est :
$\mathcal{S} = \left]-3\,;-2\right] \cup \left]1\,;+\infty\right[$

2. La seule courbe vérifiant le tableau de signe de la question précédente est la courbe $\mathscr{C}_3$: ainsi, la fonction f admet pour courbe représentative la courbe $\mathscr{C}_3$.

Exercice 7

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ définies par les relations :

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad ; \quad g(x) = -2x^2 - 3x + 5$$

1. Etablir le tableau de variation de chacune de ces fonctions.
2. Etablir le tableau de signe de chacune de ces fonctions.

Correction 7

1. a. Dressons le tableau de variation de la fonction f :
Le coefficient du terme de degré 2 est positif ; la fonction est décroissante puis croissante.
Son minimun est atteint en $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2}$ et vaut :
$$f\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(-\frac{1}{2}\Big) + 1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{3}{4}$$
On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	$\frac{3}{4}$	↗ $+\infty$

b. Dressons le tableau de variation de la fonction g :
Le coefficient du terme de second degré est négatif ; la fonction est croissante puis décroissante.
Son maximum est atteint pour la valeur :
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2{\times}(-2)} = -\frac{3}{4}$$
et a pour valeur :
$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{-8} = \frac{(-3)^2-4{\times}(-2){\times}5}{8} = \frac{49}{8}$$
Voici le tableau de variation de la fonction g :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	$\frac{49}{8}$	↘ $-\infty$

2. Pour étudier le signe de chacune de ces polynômes du second degré, nous devons chercher les racines de chacun d'eux afin d'obtenir la forme factorisée de chacune de ces expressions :

a. Etudions le signe de l'expression f :
Cherchons le signe du discriminant de $x^2{+}x{+}1$:
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4{\times}1{\times} = -3 < 0$
Le discrimiant est négatif ; ce polynôme du second degré n'admet aucune racine. Son coefficient du terme de degré 2 étant positif, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

b. Pour dresser le tableau de signe, étudions les racines de $-2x^2{-}3x{+}5$. Voici le discriminant de cette expression :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4{\times}(-2){\times}5 = 49 > 0$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$
Le discrimant de ce polynome est positif : la fonction g admet deux racines :

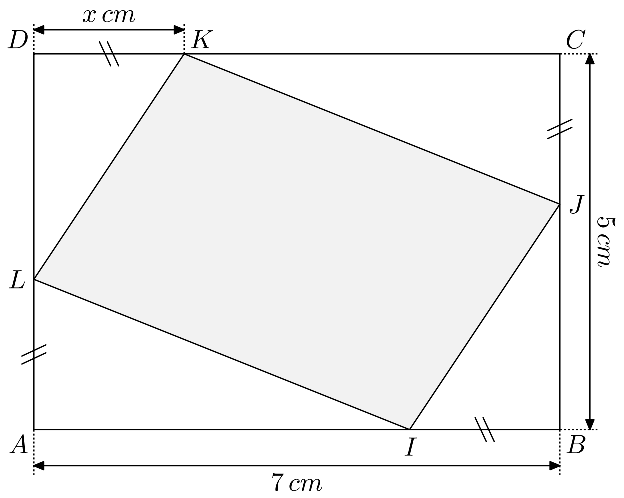
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-7}{-4} = 1 \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+7}{-4} = -\frac{5}{2}$$

Le coefficient du terme de second degré étant strictement positif ; on en déduit que la fonction g est positive pour des valeurs de x comprises entre les deux racines :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 8

On considère la figure ci-dessous :



Quel doit-être la valeur de x pour que la figure grisée ait une aire de $25\,cm^2$?

Correction 8

Déterminons les aires des quatres triangles formés “aux angles du rectangle” :

- $\mathcal{A}_{DKL} = \dfrac{x\times(5-x)}{2}$
- $\mathcal{A}_{KCJ} = \dfrac{(7-x)\times x}{2}$
- $\mathcal{A}_{IJB} = \dfrac{x\times(5-x)}{2}$
- $\mathcal{A} = \dfrac{x\times(7-x)}{2}$

Le rectangle $ABCD$ ayant pour dimensions $7\,cm$ et $5\,cm$, on en déduit que la partie hachurée a pour aire :

$$\mathcal{A}=7\times5-\Big(\frac{x\times(5-x)}{2}+\frac{(7-x)\times x}{2}+\frac{x\times(5-x)}{2}+\frac{x\times(7-x)}{2}\Big)$$
$$= 35-\big[x\times(5-x)+(7-x)\times x\big] = 35-\big(5x-x^2+7x-x^2\big)$$
$$= 35-\big(-2x^2+12x\big) = 2x^2-12x+35$$

Pour que l'aire de la partie grisée soit de $25\,cm^2$, il faut que la valeur x vérifie l'égalité :

$$2x^2-12x+35=25$$
$$2x^2-12x+35-25=0$$
$$2x^2-12x+10=0$$

Ce polynome a pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-12)^2-4\times2\times10 = 144-80 = 64$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{64}=8$

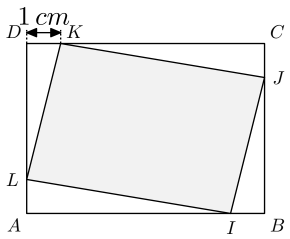
Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux racines suivantes :

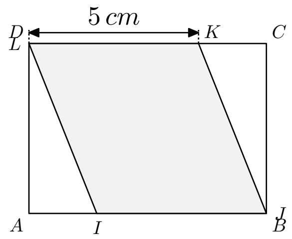
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12)-8}{2\times2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12)+8}{2\times2} = \frac{20}{4} = 5$$

Ainsi, la partie grisée a une surface de mesure $25\,cm^2$ lorsque la valeur de x vaut 5 ou 1.

Voici les représentations de ces deux cas :





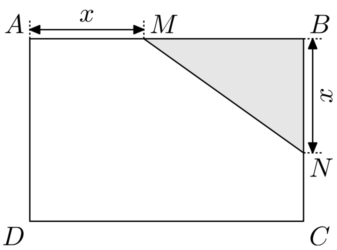
Exercice 9

Dans cet exercice, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère un rectangle $ABCD$ dont les dimensions sont données ci-dessous :

$AB=6\,m$; $AD=4\,m$.

Pour un nombre réel x compris entre 0 et 4, on place les points M et N respectivement sur les



côtés $[AB]$ et $[BC]$ tels que : $AM=x$; $BN=x$

Déterminer la ou les valeurs possibles de x pour que l'aire du triangle MBN soit égales à $\dfrac{1}{6}$ de l'aire totale du rectangle $ABCD$.

Correction 9

On a les mesures suivantes : $BM=6-x$; $BN=x$

Ainsi, l'aire du triangle MBN a pour expression en fonction de x :

$$\mathcal{A}_{MBN} = \frac{MB\times BN}{2} = \frac{(6-x)\times x}{2}$$

Le rectangle $ABCD$ a pour longueur et largeur, respectivement les valeurs $6\,m$ et $4\,m$. Ainsi, son aire a pour mesure :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = L\times\ell = 6\times4 = 24\,m^2$$

Pour que l'aire du triangle MBN représente le sixième de celui du rectangle, la valeur de x doit vérifier l'égalité suivante :

$$\mathcal{A}_{MBN} = \frac{1}{6}\times\mathcal{A}_{ABCD}$$
$$\frac{(6-x)\times x}{2} = \frac{1}{6}\times24$$
$$\frac{(6-x)\times x}{2} = 4$$
$$(6-x)\times x = 8$$
$$6x-x^2-8=0$$
$$-x^2+6x-8=0$$

Le polynôme du second degré du membre de gauche admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 6^2-4\times(-1)\times(-8) = 36-32 = 4$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que cette équation admet les deux solutions suivnates :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-6-2}{2\times(-1)} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-6+2}{2\times(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Ainsi, le triangle aura une aire d'un sixième celle du rectangle lorsque la longueur BN réalisera l'une des conditions suivantes :

$BN = 2\,m$ ou $BN = 4\,m$

