LES DERIVEES (J. Mahboub juin 2017)

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie par la relation :
   $f(x) = x^2 - 3{\cdot}x + 2$

   Déterminer, pour $h \in \mathbb{R}$, un expression simplifiée de $f(1{+}h)$.

2. Soit g la fonction définie par la relation :
   $$g(x) = \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$$
   Etablir , pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, l'égalité :
   $$g(h{+}5) = \frac{2}{\sqrt{2h+9}+3}$$

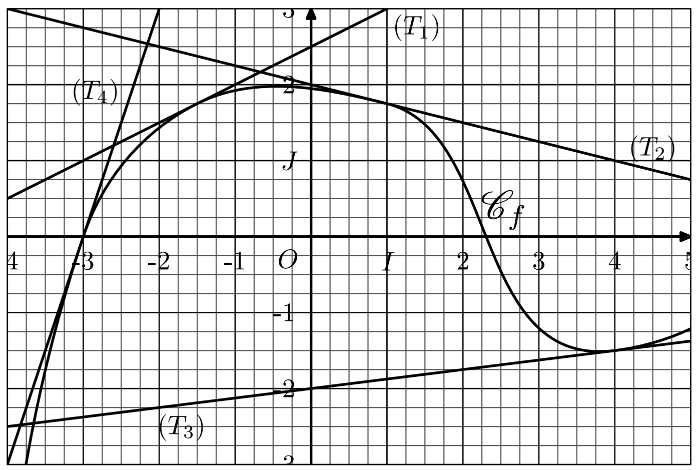
Correction 1

1. On a les transformations algébriques suivantes :
   $$f(1{+}h) = (1+h)^2 - 3{\cdot}(1+h) + 2$$
   $$= 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h + 2 = h^2 - h$$

2. On a les transformations algébriques suivantes :
   $$g(h{+}5) = \frac{\sqrt{2(h+5)-1}-3}{(h+5)-5} = \frac{\sqrt{2h+10-1}-3}{h}$$
   $$= \frac{\sqrt{2h+9}-3}{h} = \frac{\big(\sqrt{2h+9}-3\big)\big(\sqrt{2h+9}+3\big)}{h{\cdot}\big(\sqrt{2h+9}+3\big)}$$
   $$= \frac{\big(\sqrt{2h+9}\big)^2-3^2}{h{\cdot}\big(\sqrt{2h+9}+3\big)} = \frac{2h+9-9}{h{\cdot}\big(\sqrt{2h+9}+3\big)}$$
   $$= \frac{2h}{h{\cdot}\big(\sqrt{2h+9}+3\big)} = \frac{2}{\sqrt{2h+9}+3}$$

Exercice 2

Ci-dessous est représentée, dans le repère $(O\,;I\,;J)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et quatre de ses tangentes :



1. La droite (T_1) s'appelle :

   "*La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1{,}5$*"

   Nommez de même les trois autres droites.

2. Déterminer l'équation réduite de chacune de ces quatres tangentes.

Correction 2

1. Voici les intitulés possibles des trois autres droites :
   - (T_2) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 ;
   - (T_3) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4 ;
   - (T_4) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.

2. Déterminons les équations réduites de ces quatres tangentes.
   - La droite (T_1) passe par les points :
     $A(-3\,;1)$; $B(0\,;2{,}5)$
     Elle admet pour coefficient directeur :
     $$a = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{2{,}5-1}{0-(-3)} = \frac{1{,}5}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
     Ainsi, son équation réduit a pour expression :
     $$y = \frac{1}{2}{\cdot}x + b$$
     Les coordonnées du point B vérifient cette équation :
     $$2{,}5 = \frac{1}{2}\times 0 + b$$
     $$b = 2{,}5$$
     La droite (T_1) admet pour équation réduite :
     $$(T_1) : \; y = \frac{1}{2}{\cdot}x + \frac{5}{2}$$
   - La droite (T_2) passe par les points :
     $A(0\,;2)$; $B(4\,;1)$
     Elle admet pour coefficient directeur :
     $$a = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{1-2}{4-0} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$
     Ainsi, son équation réduit a pour expression :
     $$y = -\frac{1}{4}{\cdot}x + b$$
     Les coordonnées du point A vérifient cette équation :
     $$2 = -\frac{1}{4}\times 0 + b$$
     $$b = 2$$
     La droite (T_2) admet pour équation réduite :
     $$(T_2) : \; y = -\frac{1}{4}{\cdot}x + 2$$
   - La droite (T_3) passe par les points :
     $A(0\,;-2)$; $B(4\,;-1{,}5)$
     Elle admet pour coefficient directeur :
     $$a = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{-1{,}5-(-2)}{4-0} = \frac{0{,}5}{4} = \frac{1}{8}$$
     Ainsi, son équation réduit a pour expression :
     $$y = \frac{1}{8}{\cdot}x + b$$
     Les coordonnées du point A vérifient cette équation :
     $$-2 = \frac{1}{8}\times 0 + b$$
     La droite (T_3) admet pour équation réduite :
     $$(T_3) : \; y = \frac{1}{8}{\cdot}x - 2$$
   - La droite (T_4) passe par les points :
     $A(-2\,;3)$; $B(-3\,;0)$
     Elle admet pour coefficient directeur :
     $$a = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{0-3}{-3-(-2)} = \frac{-3}{-1} = 3$$
     Ainsi, son équation réduit a pour expression :

$y = 3{\cdot}x + b$

Les coordonnées du point B vérifient cette équation :

$0 = 3\times -3 + b$

$0 = -9 + b$

$b = 9$

La droite (T_4) admet pour équation réduite :

(T_4) : $y = 3{\cdot}x + 9$

Exercice 3

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. On note (T) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

1. a. Pour tout nombre réel h non-nul, établir l'identité :
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2h^2 + 3h - 1$$

   b. Quel est le coefficient directeur de la tangente (T) ? Justifier votre démarche.

2. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. a. Déterminer la valeur des réels a, b et c réalisant l'identité :
$$f(x) + x = (x-1){\cdot}\big(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c\big)$$

   b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la tangente (T).

Correction 3

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \frac{\big[2(1+h)^3 - 3(1+h)^2 - (1+h) + 1\big] - \big(2\times1^3 - 3\times1^2 - 1 + 1\big)}{h}$$
$$= \frac{2(1+h)(1+h)^2 - 3(1+2h+h^2) - 1 - h + 1 - (-1)}{h}$$
$$= \frac{(2+2h)(1+2h+h^2) - 3 - 6h - 3h^2 - h + 1}{h}$$
$$= \frac{\big(2+4h+2h^2+2h+4h^2+2h^3\big) - 3h^2 - 7h - 2}{h}$$
$$= \frac{2h^3 + 3h^2 - h}{h} = \frac{h{\cdot}\big(2h^2+3h-1\big)}{h} = 2h^2 + 3h - 1$$

   b. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est le nombre dérivée de la fonction f en 1. Sa valeur est :
$$f'(1) = \lim_{h\mapsto0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto0} 2h^2 + 3h - 1 = -1$$
Ainsi, la tangente (T) a pour coefficient directeur -1.

2. La tangente (T) ayant -1 pour coefficient, son équation réduite est de la forme :

$y = -x + b \qquad$ où $b\in\mathbb{R}$

Le point de contact $(1\,;-1)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente (T). Ses coordonnées vérifient l'équation réduite de (T) :

$-1 = -1\times1 + b$

$b = -1 + 1$

$b = 0$

La tangente (T) admet pour équation réduite :

$y = -x$

3. a. Donnons l'expression développée et réduite des deux membres de l'égalité :

- $f(x) + x = \big(2x^3 - 3x^2 - x + 1\big) = 2x^3 - 3x^2 + 1$
- $(x-1)(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c)$
$$= \big(a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + c{\cdot}x\big) - \big(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c\big)$$
$$= a{\cdot}x^3 + b{\cdot}x^2 + c{\cdot}x - a{\cdot}x^2 - b{\cdot}x - c$$
$$= a{\cdot}x^3 + \big(b-a\big){\cdot}x^2 + \big(c-b\big) - c$$

Par identification des mônomes de même degré de ces deux formes développées et réduites, on obtient le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} a = 2 \\ b-a = -3 \\ c-b = 0 \\ -c = 1 \end{cases}$$
On vérifie facilement que les valeurs de a, b et c solutions de ce système sont :

$a = 2 \quad ; \quad b = -1 \quad ; \quad c = -1$

Ainsi, on obtient la factorisation suivante :

$f(x) + x = \big(x-1\big)\big(2{\cdot}x^2 - x - 1\big)$

   b. Les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite (T) doivent avoir leur abscisse solution de l'équation :
$$f(x) = -x$$
$$f(x) + x = 0$$
D'après la question a., on a :

$\big(x-1\big){\cdot}\big(2{\cdot}x^2 - x - 1\big) = 0$

Or, un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. On obtient les deux équations suivantes :

$x - 1 = 0$	$2x^2 - x - 1 = 0$
$x = 1$	

Etudions la seconde équation.

Le membre de gauche de cette équation est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-1)^2 - 4\times2\times(-1) = 1 + 8 = 9$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que cette équation admet les deux solutions suivantes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$	$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$
$= \dfrac{-(-1)-3}{2\times2}$	$= \dfrac{-(-1)+3}{2\times2}$
$= \dfrac{-2}{4}$	$= \dfrac{4}{4}$
$= -\dfrac{1}{2}$	$= 1$

Ainsi, cette équation admet deux solutions :

$\mathcal{S} = \Big\{-\frac{1}{2}\,;1\Big\}$

Déterminons les coordonnées des deux points de $\mathcal{C}_f$ admettant $-\frac{1}{2}$ et 1 pour abscisse :

- Pour $x = -\frac{1}{2}$:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)+1$$
$$=-\frac{2}{8}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{4}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

- Pour $x=1$:

$$f(1)=2\times1^3-3\times1^2-1+1$$
$$=2-3-1+1=-1$$

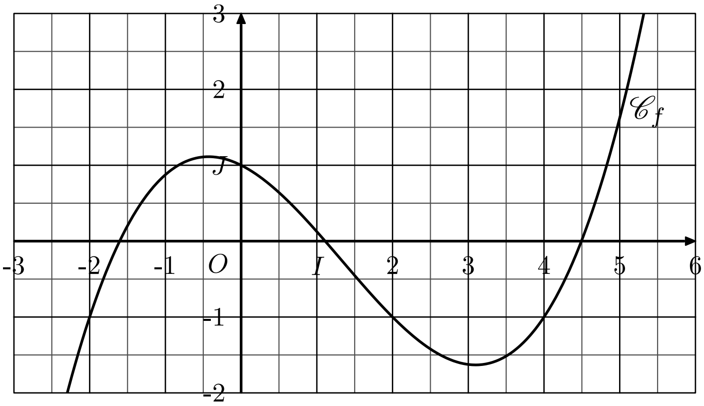
Ainsi, les deux poitns d'intersection de la droite (T) et de la courbe $\mathscr{C}_f$ ont pour coordonnées :

$$\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)\quad;\quad(1\,;-1)$$

Exercice 4

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$$



On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Donner l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. On considère la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
   a. Donner la valeur du coefficient directeur de (T).
   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T).
   c. Dans le repère ci-dessous, tracer la tangente (T).
3. On considère la droite (d) admettant l'équation réduite :
   (d) : $y=-x+1$
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (d) et de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Correction 4

1. L'expression de la fonction f étant donnée sous la forme d'une somme, on en déduit facilement l'expression de sa dérivée :
$$f'(x)=\frac{1}{8}\times(3x^2)-\frac{1}{2}\times(2x)-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{8}x^2-x-\frac{1}{2}$$

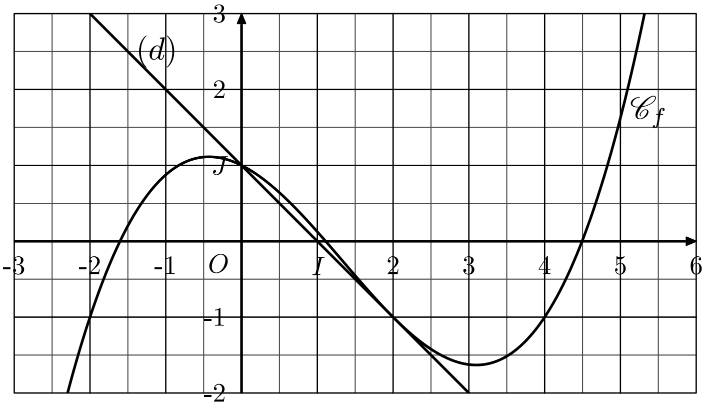
2. a. Le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 2 :
$$f'(2)=\frac{3}{8}\times2^2-2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{4}{2}-\frac{1}{2}=-1$$

   b. La droite (T) ayant pour coefficient directeur, son équation réduite admet pour expression :
   (T) : $y=-x+b$ où $b\in\mathbb{R}$.

   L'image de 2 par la fonction f a pour valeur :
$$f(2)=\frac{1}{8}\times2^3-\frac{1}{2}\times2^2-\frac{1}{2}\times2+1$$
$$=1-2-1+1=-1$$
   On en déduit que le point de coordonnées $A(2\,;-1)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$; étant le point de contact de la tangente (T) avec la courbe $\mathscr{C}_f$, on en déduit que le point A appartient aussi à la droite (T).

   Ainsi, les coordonnées du point A vérifient l'équation réduite de la tangente (T) :
$$y=-x+b$$
$$-1=-2+b$$
$$-1+2=b$$
$$b=1$$
   Ainsi, la droite (T) admet pour équation réduite :
   $y=-x+1$

   c. Voici la représentation de la droite (T) :



3. Les abscisses des points d'intersections de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d) vérifient l'équation :
$$f(x)=-x+1$$
$$\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1=-x+1$$
   Multiplions par 8 les deux membres de cette équation :
$$x^3-4x^2-4x+8=-8x+8$$
$$x^3-4x^2-4x+8x=0$$
$$x^3-4x^2+4x=0$$
$$x\cdot\left(x^2-4x+4\right)=0$$
   En reconnaissant la seconde identité remarquable :
$$x\cdot(x-2)^2=0$$
   Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.
   Cette équation admet pour ensemble de solution :
   $\mathcal{S}=\{0\,;2\}$

   Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (d) admettent deux points d'intersection ayant pour abscisse 0 et 1. Ces deux points d'intersection ont pour coordonnées :
   $A(0\,;1)$; $B(2\,;-1)$

Exercice 5

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x)=4x^2-4x-3$

1. Calculer le nombre dérivé de la fonction f en 2.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Correction 5

1. On a :
$f(2)=4\times2^2-4\times2-3=4\times4-8-3=16-8-3=5$

On a la transformation suivante :
$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\big[4\cdot(2+h)^2-4\cdot(2+h)-3\big]-5}{h}$$
$$=\frac{4\cdot(4+4\cdot h+h^2)-8-4\cdot h-8}{h}$$
$$=\frac{16+16\cdot h+4\cdot h^2-8-4\cdot h-8}{h}$$
$$=\frac{12\cdot h+4\cdot h^2}{h}=12+4\cdot h$$

On obtient ainsi, la limite suivante :
$$f'(2)=\lim_{h\mapsto0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\mapsto0}12+4\cdot h=12$$

2. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est obtenue à l'aide de la formule :
$y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$
$y=f'(2)\cdot(x-2)+f(2)$
$y=12\cdot(x-2)+5$
$y=12\cdot x-24+5$
$y=12\cdot x-19$

Exercice 6

On souhaite déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes :

$f\colon x\longmapsto(3x^2+3x)(2x+2)$; $g\colon x\longmapsto(2x^2+1)\sqrt{x}$

$h\colon x\longmapsto\frac{1}{x}\cdot(3-x^2)$; $j\colon x\longmapsto\frac{2}{x}\cdot\sqrt{x}$

1. L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $u\cdot v$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier les deux facteurs de ce produit et leur dérivée respective.

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				
$j(x)$				

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit :
$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
Etablir que ces fonctions admettent pour dérivée les fonctions ci-dessous :

$f'\colon x\longmapsto18x^2+24x+6$; $g'\colon x\longmapsto\frac{10x^2+1}{2\sqrt{x}}$

$h'\colon x\longmapsto\frac{-x^2-3}{x^2}$; $j'\colon x\longmapsto-\frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}$

Correction 6

1. L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $u\cdot v$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier les deux facteurs de ce produit et leur dérivée respective.

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$	$3x^2+3x$	$2x+2$	$6x+3$	2
$g(x)$	$2x^2+1$	$\sqrt{x}$	$4x$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$h(x)$	$\frac{1}{x}$	$3-x^2$	$-\frac{1}{x^2}$	$-2x$
$j(x)$	$\frac{2}{x}$	$\sqrt{x}$	$-\frac{2}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. a. Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :
$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$=(6x+3)(2x+2)+(3x^2+3x)\times2$$
$$=12x^2+12x+6x+6+6x^2+6x$$
$$=18x^2+24x+6$$

b. Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :
$$g'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$=4x\sqrt{x}+(2x^2+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{4x\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{2x^2+1}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{8x^2+(2x^2+1)}{2\sqrt{x}}=\frac{10x^2+1}{2\sqrt{x}}$$

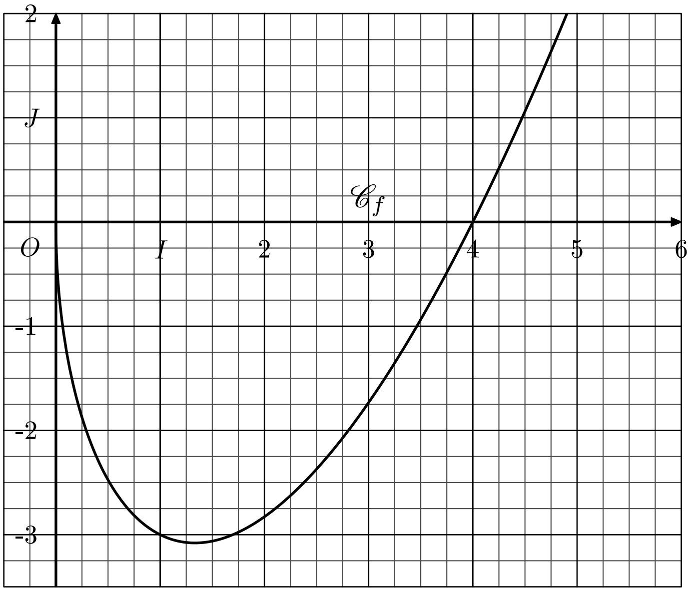
c. Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :
$$h'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$=-\frac{1}{x^2}\cdot(3-x^2)+\frac{1}{x}\cdot(-2x)=\frac{-(3-x^2)}{x^2}-2$$
$$=\frac{-3+x^2}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}=\frac{-3+x^2-2x^2}{x^2}=\frac{-x^2-3}{x^2}$$

d. Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :
$$j'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$=-\frac{2}{x^2}\cdot\sqrt{x}+\frac{2}{x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{-2\sqrt{x}}{x^2}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$$
$$=\frac{-2\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x^2\cdot\sqrt{x}}+\frac{x}{x^2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{-2x+x}{x^2\cdot\sqrt{x}}=\frac{-x}{x^2\cdot\sqrt{x}}=\frac{-1}{x\cdot\sqrt{x}}$$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :
$f(x) = (x-4)\sqrt{x}$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f est donnée dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé :



1. a. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.

   b. Déterminer l'image et le nombre dérivé de la fonction f en 4.

   c. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_1) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

   d. Tracer la tangente (T_1).

2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_2) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   b. Tracer la tangente (T_2).

Correction 7

1. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = x-4 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 1\times\sqrt{x} + (x-4)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \sqrt{x} + \frac{x-4}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x-4}{2\sqrt{x}} = \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x-4}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2x+(x-4)}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-4}{2\sqrt{x}}$$

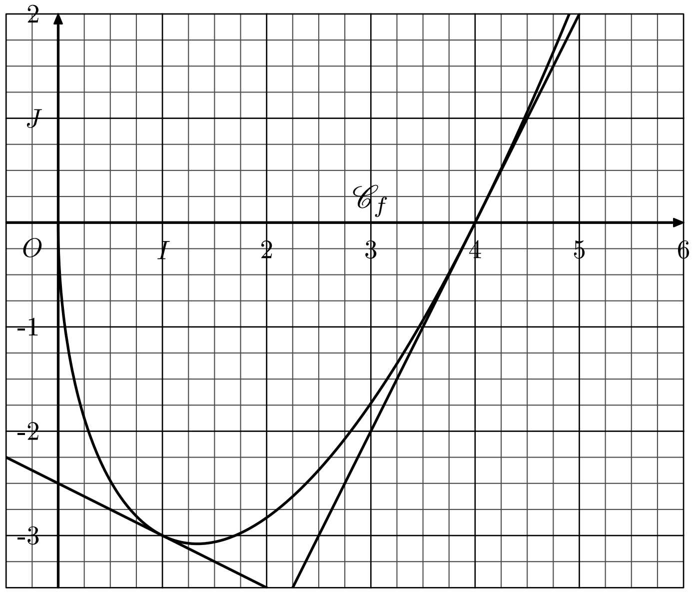
   b. Voici les deux valeurs demandées :
   - $f(4) = (4-4)\cdot\sqrt{4} = 0\times 2 = 0$
   - $f'(4) = \dfrac{3\times 4-4}{2\sqrt{4}} = \dfrac{12-4}{2\times 2} = \dfrac{8}{4} = 2$

   c. On en déduit l'équation réduite de la tangente (T_1) :
   $y = f'(4)\cdot\big(x-4\big) + f(4)$
   $y = 2\cdot(x-4) + 0$
   $y = 2x-8$

2. a. On a les deux valeurs particulières suivantes :
   - $f(1) = (1-4)\cdot\sqrt{1} = -3\times 1 = -3$
   - $f'(1) = \dfrac{3\times 1-4}{2\sqrt{1}} = \dfrac{3-4}{2} = -\dfrac{1}{2}$

   On en déduit l'équation réduite de la tangente (T_2) :
   $y = f'(1)\cdot\big(x-1\big) + f(1)$
   $y = -\dfrac{1}{2}(x-1) + (-3)$
   $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} - 3$
   $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$

Voici le tracé des deux tangentes (T_1) et (T_2) :



Exercice 8

On souhaite déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes :

$$f\colon x \longmapsto \frac{3-2x}{x+1} \quad ; \quad g\colon x \longmapsto \frac{x^2+4x-1}{2x-1}$$
$$h\colon x \longmapsto \frac{3}{2-x} \quad ; \quad j\colon x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

1. L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $\dfrac{u}{v}$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier le numérateur et le dénominateur de ce quotient et leurs dérivées respectives.

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				
$j(x)$				

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'{\cdot}v - u{\cdot}v'}{v^2}$
Etablir que ces fonctions admettent pour dérivée les fonctions ci-dessous :

$$f' : x \longmapsto -\frac{5}{(x+1)^2} \quad ; \quad g' : x \longmapsto \frac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2}$$

$$h' : x \longmapsto \frac{3}{(x-2)^2} \quad ; \quad j' : x \longmapsto \frac{1-x}{2(x+1)^2{\cdot}\sqrt{x}}$$

Correction 8

1. Par identification du numérateur et dénominateur de chaque quotient, voici le tableau complété :

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$	$3-2x$	$x+1$	-2	1
$g(x)$	x^2+4x-1	$2x-1$	$2x+4$	2
$h(x)$	3	$2-x$	0	-1
$j(x)$	$\sqrt{x}$	$x+1$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	1

2. a. La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{-2{\cdot}(x+1)-(3-2x)\times 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-2x-2-3+2x}{(x+1)^2} = \frac{-5}{(x+1)^2}$$

b. La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :

$$g'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{(2x+4)(2x-1)-(x^2+4x-1)\times 2}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(4x^2-2x+8x-4)-(2x^2+8x-2)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{4x^2-2x+8x-4-2x^2-8x+2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2}$$

c. La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction h' :

$$h'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{0\times(2-x)-3\times(-1)}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{3}{(2-x)^2}$$

d. La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction j' :

$$j'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}{\cdot}(x+1)-\sqrt{x}\times 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \frac{\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{x+1-2x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \frac{\dfrac{-x+1}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-x+1}{2\sqrt{x}{\cdot}(x+1)^2}$$

