Probabilités et VA (J. Mahboub juin 2017)

Exercice 1

On considère un jeu de 52 cartes et les évènements suivants :

- A : "la carte est de couleur rouge" ;
- B : "la carte n'est pas une figure".

Déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(B)$ b. $\mathcal{P}(B\cap A)$ c. $\mathcal{P}(B\cup A)$ d. $\mathcal{P}(\overline{B}\cap A)$

Correction 1

a. Il y a 12 figures dans ce jeu de cartes. Ainsi :

$$\mathcal{P}(B)=\frac{40}{52}=\frac{10}{13}$$

b. Il y a 20 cartes de couleurs rouges qui ne soient pas une figure :

$$\mathcal{P}(B\cap A)=\frac{20}{52}=\frac{5}{13}$$

c. Il y a 46 cartes vérifiant l'évènement $B\cup A$:

$$\mathcal{P}(B\cup A)=\frac{46}{52}=\frac{23}{26}$$

d. Il y a 6 figures rouges :

$$\mathcal{P}(\overline{B}\cap A)=\frac{6}{52}=\frac{3}{26}$$

Exercice 2

Après étude d'un dés truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6, on obtient la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,2	0,15	0,12	0,17	0,08	0,28

Déterminer les probabilités de chacun des éléments suivants :

1. A : "*Le résultat est supérieur ou égal à 4*".
2. B : "*Le résultat est un nombre impair*".
3. C : "*Le résultat est un nombre pair*".

Correction 2

1. Les faces réalisant cet évènement sont 4, 5, 6. On a :

$$\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(\{4\})+\mathcal{P}(\{5\})+\mathcal{P}(\{6\})$$
$$=0{,}17+0{,}08+0{,}28=0{,}53$$

2. Les faces du dé réalisant l'évènement b sont 1, 3, 5 :

$$\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(\{1\})+\mathcal{P}(\{3\})+\mathcal{P}(\{5\})$$
$$=0{,}2+0{,}12+0{,}08=0{,}4$$

3. En remarquant qu'on a : $C=\overline{B}$
On obtient la probabilité suivante :
$\mathcal{P}(C)=\mathcal{P}(\overline{B})=1-\mathcal{P}(B)=1-0{,}4=0{,}6$

Exercice 3

En fin d'année l'association des élèves d'un lycée organise une tombola : 100 tickets sont mis en vente à 10 euros l'unité.

Voici les différents tickets gagnants :

- 2 tickets gagnet 50 € ;
- 10 tickets gagnent 20 € ;
- 20 tickets gagnent 10 €.

1. Quelle est la somme des gains de cette tombola ?
2. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   - A : "*le ticket ne gagne rien*" ;
   - B : "*le ticket gagne 10 €*" ;
   - C : "*le ticket gagne plus de 20 €*" ;
   - D : "*le ticket gagne plus de 50 €*" ;
3. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque ticket la valeur du ticket gagnant :
   a. Déterminer l'espérance $E(\mathcal{X})$ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
   b. Déterminer la variance $V(\mathcal{X})$ et l'écart type $\sigma(\mathcal{X})$ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Correction 3

1. La somme des gains de cette tombola est égale à :
$2\times50+10\times20+20\times10=100+200+200=500$ €

2. On a les probabilités suivantes :

$$\mathcal{P}(A)=\frac{68}{100}\ ;\ \mathcal{P}(B)=\frac{20}{100}\ ;\ \mathcal{P}(C)=\frac{10}{100}\ ;\ \mathcal{P}(D)=\frac{2}{100}$$

3. a. On calcule l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ par la formuel :

$$E(\mathcal{X})=0\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)+10\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}10)+20\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}20)+50\cdot\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}50)$$
$$=0\times\frac{68}{100}+10\times\frac{20}{100}+20\times\frac{10}{100}+50\times\frac{2}{100}$$
$$=0+2+2+1=5$$

b. On calcule la variance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ à travers la formule :

$$V(\mathcal{X})=\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)\cdot\big[0-E(\mathcal{X})\big]^2+\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}10)\cdot\big[10-E(\mathcal{X})\big]^2$$
$$+\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}20)\cdot\big[20-E(\mathcal{X})\big]^2+\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}50)\cdot\big[50-E(\mathcal{X})\big]^2$$
$$=\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)\cdot(0-5)^2+\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}10)\cdot(10-5)^2$$
$$+\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}20)\cdot(20-5)^2+\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}50)\cdot(50-5)^2$$
$$=\frac{68}{100}\times5^2+\frac{20}{100}\times5^2+\frac{10}{100}\times15^2+\frac{2}{100}\times45^2$$
$$\simeq 85$$

On en déduit l'écart-type : $\sigma(\mathcal{X})\simeq 9{,}2$

Exercice 4

Un petit restaurant propose à son menu trois plats et deux desserts. Voici la description de son menu :

Spaguetti .... 6 €	Salade de fruits ..... 2 €
Filet de boeuf ..... 7 €	Crème anglaise ...... 3 €
Entrecote .... 8 €	

Chaque client rentrant dans les restaurants prend exactement un plat et un dessert.

1. En prenant un client au hasard à la sortie du restaurant, préciser quel peut être le montant de sa facture.
2. On supposant que toutes les combinaisons $^{\text{plat}}/_{\text{dessert}}$ ont la même probabilité d'être choisies par un client.

a. Combien de combinaison peut-on créer à partir de ce menu ?

b. Quel est la probabilité pour qu'un client ait payé 8 € ? 11 € ?

c. Montrer que la probabilité d'avoir une facture d'un montant de 10 € est de $\dfrac{1}{3}$.

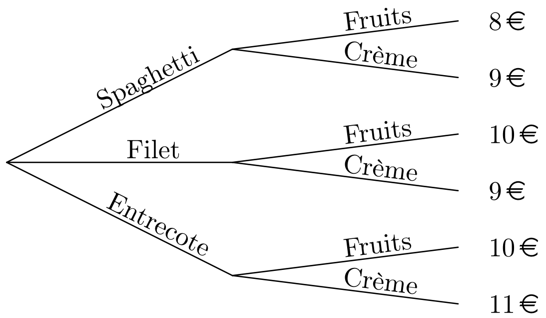
d. Compléter le tableau ci-dessous :

Montant de la facture	8	9	10	11
Probabilité				

Correction 4

1. Un client ayant choisi un plat et un dessert aura sa facture comprise entre 8 € et 11 € : toutes les valeurs entre ces deux extrémums sont également possible.

2. a. Il y a 3 plats au choix et à chacun d'eux, on peut associer deux dessert : on en déduit qu'il y a 6 combinaisons possibles. L'arbre ci-dessous représente les diverses possibilités :



b. On remarque qu'il n'y a qu'un choix permettant d'obtenir une facture de 8 €. Ainsi, la probabilité que le client ait une facture de 8 € est de $\dfrac{1}{6}$.
Le même raisonnement emmène à donner la probabilité d'obtenir une facture de 11 € est de $\dfrac{1}{6}$.

c. Il y a deux choix qui peuvent emmener à une facture de 10 €. Ainsi, la probabilité d'obtenir une telle facture est :
$\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{6}$

d. Voici le tableau complété :

Montant de la facture	8	9	10	11
Probabilité	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

