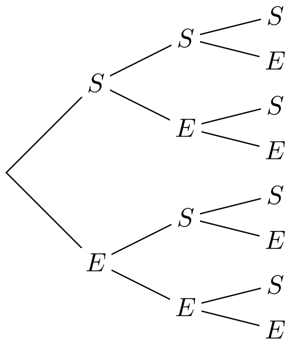
Loi BINOMIALE (J. Mahboub juin 2017)

Exercice 1

On considère une épreuve admettant que deux issues : une nommé "*succés*" et noté S de probabilité 0,4 ; l'autre nommé "*échec*" et notée E.

On décide de répeter trois fois cette même épreuve. On obtient l'arbre de probabilité ci-contre.

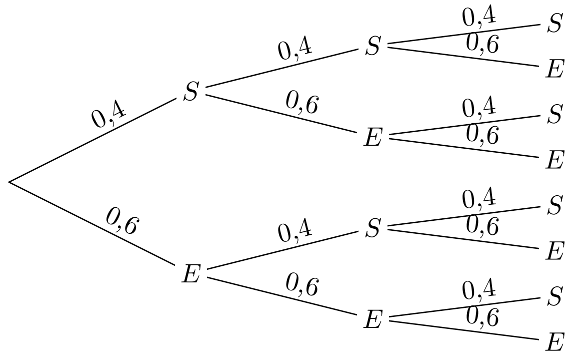
On suppose ces répétitions indépendantes entre elles.



1. Compléter cet arbre de probabilité ?
2. a. Combien de chemins comportent 3 succés ?
   b. Donner la probabilité d'obtenir trois succés à l'issue de cette expérience aléatoire ?
3. a. Combien de chemins comportent 0 succés ?
   b. Donner la probabilité de n'obtenir aucun succés à l'issue de cette expérience aléatoire ?
4. a. Combien de chemins comportent 2 succés ?
   b. Donner la probabilité d'obtenir exactement deux succés à l'issue de cette expérience aléatoire ?

Correction 1

1. Voici l'arbre de probabilité complété :



2. a. Il n'y a qu'un chemin comportant 3 succés.
   b. La probabilité de ce chemin est de :
   $0{,}4^3 = 0{,}064$
3. a. Il n'existe qu'un seul chemin comportant aucun succés.
   b. La probabilité de n'obtenir aucun succés est de :
   $0{,}6^3 = 0{,}216$
4. a. Il y a trois chemins comportant exactement deux succés *(donc nécessairement un seul échec)*.
   b. Chacun de ces chemins a une probabilité de :
   $0{,}4^2 \times 0{,}6 = 0{,}096$
   Or, d'après la question a., il y a trois de ces chemins qui présentent deux succés. Ainsi, la probabilité totale d'obtenir deux succés lors de cette expérience aléatoire est de :
   $3 \times 0{,}096 = 0{,}288$

Exercice 2

Soit $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 15 et 0,35. C'est à dire : $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}(15\,;0{,}35)$

Déterminer la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=7)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

Correction 2

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5) = \binom{15}{5} \cdot 0{,}35^5 \cdot \left(1-0{,}35\right)^{10}$

$= 3003 \times 0{,}35^5 \times 0{,}65^{10} \simeq 0{,}212$

b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=7) = \binom{15}{7} \cdot 0{,}35^7 \cdot \left(1-0{,}35\right)^{8}$

$= 6435 \times 0{,}35^7 \times 0{,}65^{8} \simeq 0{,}132$

c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5) = \binom{15}{5} \cdot 0{,}35^9 \cdot \left(1-0{,}35\right)^{6}$

$= 5005 \times 0{,}35^9 \times 0{,}65^{6} \simeq 0{,}030$

Exercice 3

On suppose qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre $n=22$ et $p=0{,}37$

A l'aide de la calculatrice et sans justification, donner la probabilité de $\mathcal{P}\big(3 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 7\big)$ arrondie à 10^{-4} près.

Correction 3

La calculatrice permet d'obtenir les deux valeurs suivantes :
$\mathcal{P}\big(\mathcal{X} \leqslant 2\big) \simeq 0{,}00360 \quad ; \quad \mathcal{P}\big(\mathcal{X} \leqslant 7\big) \simeq 0{,}39611$

On a la réunion des deux ensembles :

$$\big\{\mathcal{X} \leqslant 7\big\} = \big\{\mathcal{X} < 3\big\} \cup \big\{3 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 7\big\}$$

De plus, les ensembles $\big\{\mathcal{X}<3\big\}$ et $\big\{3 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 7\big\}$ sont disjoints entre eux

$$\mathcal{P}\big(\mathcal{X} \leqslant 7\big) = \mathcal{P}\big(\mathcal{X}<3\big) + \mathcal{P}\big(3 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 7\big)$$
$$\mathcal{P}\big(\mathcal{X} \leqslant 7\big) = \mathcal{P}\big(\mathcal{X} \leqslant 2\big) + \mathcal{P}\big(3 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 7\big)$$
$$\mathcal{P}\big(3 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 7\big) = \mathcal{P}\big(\mathcal{X} \leqslant 7\big) - \mathcal{P}\big(\mathcal{X} \leqslant 2\big)$$

On en déduit la probabilité recherchée :

$$\mathcal{P}\big(3 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 7\big) \simeq 0{,}39611 - 0{,}00360 = 0{,}39251$$
$$\simeq 0{,}3925$$

Exercice 4

On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

1. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire $\mathcal{X}$?
2. Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$.
3. Donner l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Correction 4

1. La probabilité d'obtenir la face 6 est de $\frac{1}{6}$ car on utilise un dé équilibré : c'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

Les trois lancers de dé étant indépendant les uns des autres, nous pouvons assimiler ces trois lancers à un schéma de Bernoulli de paramètre 3 et $\frac{1}{6}$.

Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre d'apparition de la face 6. Elle suit une loi binomiale de paramètre 3 et $\frac{1}{6}$: $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}\left(3\,;\frac{1}{6}\right)$

2. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale, on obtient la valeur de la probabilité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2) = \binom{3}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{72} \simeq 0{,}0694$$

3. Les propriétés des variables aléatoires suivant une loi binomiale permettent d'obtenir directement l'espérance de celle-ci :

$$E(\mathcal{X}) = n\times p = 3\times\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Exercice 5

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 100 et 0,35 $(\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(100\,;0{,}35))$.

Les questions suivantes sont à traiter à l'aide de la calculatrice et les résultats doivent être donnés, si nécessaire, au millième près :

1. Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}43)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 38)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 31)$

2. a. Déterminer la valeur des plus petits entiers a et b vérifiant les deux conditions suivantes :

   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025 \quad ; \quad \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}975$

   b. Donner l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence associée à la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Correction 5

1. a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}43) \simeq 0{,}021$

   b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 38) \simeq 0{,}770$

   c. Les deux évènements $\{\mathcal{X}<31\}$ et $\{\mathcal{X}\geqslant 31\}$ sont complémentaires. On en déduit l'égalité :

   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 31) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}<31) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 30)$
   $= 1-0{,}173 = 0{,}827$

2. a. A l'aide de la calculatrice, on a :

   - 26 est le plus petit entier naturel a vérifiant l'inégalité :
     $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant a) > 0{,}025$
   - 44 est le plus petit entier naturel b vérifiant l'inégalité :
     $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant b) \geqslant 0{,}975$

   b. Ainsi, l'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence associée à la variable aléatoire $\mathcal{X}$ est :

   $I = \left[\frac{26}{100}\,;\frac{44}{100}\right] = [0{,}26\,;0{,}44]$.

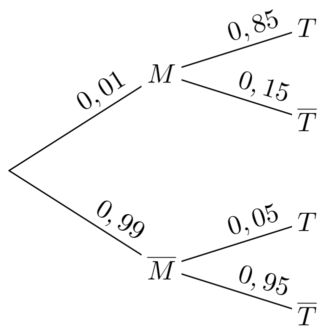
Exercice 6

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux.

On note les évènements :

- M : "*l'animal est porteur de la maladie*" ;
- T : "*le test est positif*".

Voici l'arbre de probabilité obtenu après l'étude du cheptail :



1. Un animal est choisi au hasard.

   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

   b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

2. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$? Justifier.

   b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ? On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième près.

3. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subbissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

   a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ associant à un animal le coût à engager.

   b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Correction 6

1. a. La probabilité qu'un animal choisi au hasard soit porteur de la maladie et que son test soit positif a

pour valeur :
$\mathcal{P}(M\cap T) = 0{,}01\times 0{,}85 = 0{,}0085$

b. Les évènements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :
$T = (M\cap T)\cup(\overline{M}\cap T)$

Ces ensembles étant disjoints deux à deux, on en déduit la probabilité :
$$\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(M\cap T) + \mathcal{P}(\overline{M}\cap T)$$
$$= 0{,}01\times 0{,}85 + 0{,}99\times 0{,}05 = 0{,}0085 + 0.0495 = 0{,}058$$

2. a. Le fait de choisir au hasard un animal et de regarder si son test est positif est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,058.
Les cinq répétitions étant associés à un tirage à avec remise, nous sommes dans un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et 0,058.
La variable $\mathcal{X}$ comptant le nombre de "*succès*" dans ce schéma de Bernoulli, elle suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0,58 :
$\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(5\,;0{,}058)$

b. L'évènement "*au moins un des cinq animaux ont un test positif*" se traduit par l'ensemble $\{\mathcal{X}\geqslant 1\}$.
Or, les deux ensembles $\{\mathcal{X}<1\}$ et $\{\mathcal{X}\geqslant 1\}$ sont complémentaires :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}<1) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$$
$$= 1 - \binom{5}{0}\times 0{,}058^0\times(1-0{,}058)^5$$
$$= 1 - 1\times 1\times 0{,}942^5 \simeq 0{,}258$$

3. a. En notant $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire associant à chaque animal le coût du soin à associer a pour espérance :
$$E(\mathcal{Z}) = 0\times\mathcal{P}(\mathcal{Z}=0) + 100\times\mathcal{P}(\mathcal{Z}=100) + 1000\times\mathcal{P}(\mathcal{Z}=1000)$$
$$= 100\times 0{,}058 + 1000\times 0{,}0015 = 7{,}3$$

b. Ainsi, en possédant un troupeau de 200 bêtes, l'éleveur doit préparer la somme de :
$200\times 7{,}3 = 1460$ €.

