De la 1G vers la TG - Partie 1- Maths - S Pluot

Correction 1

1.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(1-x)(2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-2x+4$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(x-3)(-2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Correction 2

a. Le polynôme x^2-3x+2 a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-3)^2-4\times1\times2 = 9-8 = 1$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-1}{2\times1} = \frac{2}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+1}{2\times1} = \frac{4}{2} = 2$$

Le coefficient du second degré étant positif, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} =]-\infty\,;1[\cup]2\,;+\infty[$

b. Le polynôme x^2-x-2 a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-1)^2-4\times1\times(-2) = 1+8 = 9$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-3}{2\times1} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+3}{2\times1} = \frac{4}{2} = 2$$

Le coefficient du second degré étant positif, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = \big]-1\,;\,2\big[$

c. Le polynôme $-9x^2+12x-4$ a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 12^2-4\times(-9)\times(-4) = 144-144 = 0$

Le discriminant étant nul, ce polynôme admet une unique rqcine :
$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{12}{2\times(-9)} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$

Puisque le coefficient du second degré de ce polynôme est négatif, o a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-9x^2+12x-4$		$-$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = \mathbb{R}$

Correction 3

1. On a le développement suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= (x+1){\cdot}(2{\cdot}x^2+b{\cdot}x-12)\\ &= 2{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2-12{\cdot}x+2{\cdot}x^2+b{\cdot}x-12\\ &= 2{\cdot}x^3+(b+2){\cdot}x^2+(b-12){\cdot}x-12\end{aligned}$$

Par identification avec la forme développée réduite de $\mathcal{P}$, on obtient le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} 2 = 2\\ b+2 = 7\\ -7 = b-12\\ -12 = -12\end{cases}$$

On en déduit la factorisation :
$\mathcal{P} = (x+1){\cdot}(2{\cdot}x^2+5{\cdot}x-12)$

2. Etudions le second facteur de la factorisation. Ce polynome du second degré a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 5^2-4\times2\times(-12) = 25+96 = 121$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-5-11}{2\times2} = \frac{-16}{4} = -4 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-5+11}{2\times2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-4		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2{\cdot}x^2+5{\cdot}x-12$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\mathcal{P}$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Correction 4

- La réponse a. est fausse :
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses. On en déduit que le nombre dérivé de la fonction f en 0 vaut 0

- La réponse b. est fausse :
Un nombre dérivée de 0 en -1 entrainerai une tangente

parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse -1 de la courbe $\mathscr{C}_f$.
Or, on voit que la courbe $\mathscr{C}_f$ n'admet pas une telle tangente au point d'abscisse -1.

- La réponse correcte est c. :
La tagente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3 est une droite passant par les points $A(-4\,;4)$ et $B(-2\,;2)$.
Le coefficient directeur de cette tangente a pour valeur :
$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-4}{(-2)-(-4)}=\frac{-2}{-2+4}=\frac{-2}{2}=-1$$

Correction 5

1. La fonction f est une fonction polynôme qui admet pour dérivée :
$$f'(x)=\big(5{\cdot}x^4\big)+3{\cdot}\big(2{\cdot}x\big)-1+0$$
$$=5{\cdot}x^4+6{\cdot}x-1$$

2. La fonction f est une fonction polynômiale qui admet pour dérivée :
$$f'(x)=2{\cdot}\big(7{\cdot}x^6\big)-\big(2{\cdot}x\big)-2+0$$
$$=14{\cdot}x^6-2{\cdot}x-2$$

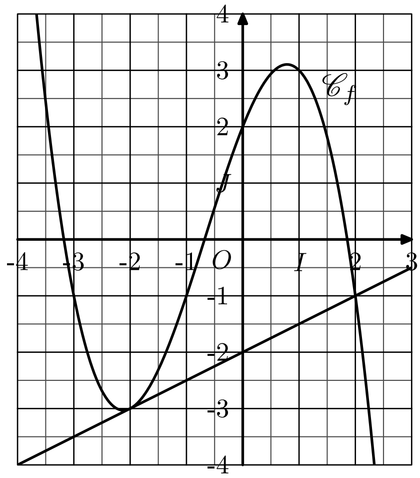
Correction 6

1. a. La fonction f' dérivée de la fonction f admet l'expression :
$$f'(x)=-\frac{1}{2}{\cdot}3{\cdot}x^2-2x+\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}{\cdot}x^2-2{\cdot}x+\frac{5}{2}$$

b. Le nombre dérivée de la fonction f au point d'abscisse -2 a pour valeur :
$$f'(-2)=-\frac{3}{2}{\cdot}(-2)^2-2{\cdot}(-2)+\frac{5}{2}$$
$$=-\frac{3}{2}{\times}4+4+\frac{5}{2}=-6+4+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$$

2. a. L'image du nombre 2 par la fonction f a pour valeur :
$$f(-2)=-\frac{1}{2}{\cdot}(-2)^3-(-2)^2+\frac{5}{2}{\cdot}(-2)+2$$
$$=-\frac{1}{2}{\times}(-8)-4-5+2=4-4-5+2=-3$$
Ainsi, le point de coordonnées $\big(-2\,;-3\big)$ est le point de contact de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$.
La formule donnant l'équation réduite de la tangente à une courbe permet d'obtenir l'équation réduite de la tangente (T) :
$$y=f'(-2){\cdot}\big[x-(-2)\big]+f(-2)$$
$$y=\frac{1}{2}{\cdot}\big(x+2\big)-3$$
$$y=\frac{1}{2}{\cdot}x+1-3$$
$$y=\frac{1}{2}{\cdot}x-2$$

b. On a le tracé suivant :



Correction 7

a. La fonction f admet pour dérivée :
$$f'(x)=2{\cdot}x+\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}=\frac{2{\cdot}x{\times}2{\cdot}\sqrt{x}}{2{\cdot}\sqrt{x}}+\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}=\frac{4{\cdot}x{\cdot}\sqrt{x}+1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$

b. L'expression de la fonction g est données sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$$u(x)=x\quad;\quad v(x)=\sqrt{x}$$
qui admettent pour dérivées :
$$u'(x)=1\quad;\quad v'(x)=\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$
La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :
$$g'(x)=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)=1{\cdot}\sqrt{x}+x{\cdot}\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$
$$=\sqrt{x}+\frac{x}{2{\cdot}\sqrt{x}}=\sqrt{x}{\times}\frac{2{\cdot}\sqrt{x}}{2{\cdot}\sqrt{x}}+\frac{x}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$
$$=\frac{2{\cdot}x}{2{\cdot}\sqrt{x}}+\frac{x}{2{\cdot}\sqrt{x}}=\frac{3{\cdot}x}{2{\cdot}\sqrt{x}}$$

Correction 8

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$$u(x)=x+2\quad;\quad v(x)=\mathrm{e}^{-x+1}$$
qui admettent pour dérivées :
$$u'(x)=1\quad;\quad v'(x)=-\mathrm{e}^{-x+1}$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x)=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)=1{\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}+\big(x{+}2\big){\cdot}\big({-}\mathrm{e}^{-x+1}\big)$$
$$=1{\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}+\big(-x-2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}=\big(1+-x-2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}$$
$$=\big(-x-1\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}=-\big(x+1\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}$$

2. La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, le signe de la fonction f' ne dépend que du signe de son facteur $-\big(x{+}1\big)$. Or, ce facteur admet pour tableau de signes sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-(x+1)$		$+$	0	$+$	

On en déduit le signe de la fonction f' sur $\big[-2\,;4\big]$:

x	-2		-1		4
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

On a les images suivantes par la fonction f :

- $f(-2)=\big(-2+2\big)\cdot\mathrm{e}^{-(-2)+1}=0\cdot\mathrm{e}^{2+1}=0$
- $f(-1)=\big(-1+2\big)\cdot\mathrm{e}^{-(-1)+1}=1\cdot\mathrm{e}^{1+1}=\mathrm{e}^2$
- $f(4)=\big(4+1\big)\cdot\mathrm{e}^{-4+1}=5\cdot\mathrm{e}^{-3}$

Ainsi, la fonction f admet le tableau de variations ci-dessous sur $\big[-2\,;4\big]$:

x	-2		-1		4
Variation de f	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$5\cdot\mathrm{e}^{-3}$

Correction 9

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x)=x^2-2\cdot x+1 \quad ; \quad v(x)=\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=2\cdot x-2 \quad ; \quad v'(x)=-2\cdot\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned}
f'(x)&=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\\
&=\big(2\cdot x-2\big)\cdot\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}+\big(x^2-2\cdot x+1\big)\cdot\big(-2\cdot\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}\big)\\
&=\big(2\cdot x-2\big)\cdot\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}+\big(-2\cdot x^2+4\cdot x-2\big)\cdot\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}\\
&=\Big[\big(2\cdot x-2\big)+\big(-2\cdot x^2+4\cdot x-2\big)\Big]\cdot\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}\\
&=\big(2\cdot x-2-2\cdot x^2+4\cdot x-2\big)\cdot\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}\\
&=\big(-2\cdot x^2+6\cdot x-4\big)\cdot\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}
\end{aligned}$$

2. La fonction exponentielle étant strictement positive, on en déduit que le signe de la fonction f' ne dépend que du signe de son facteur $-2\cdot x^2+6\cdot x-4$. Ce polynôme du second degré admet pour discriminant :
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=6^2-4\times(-2)\times(-4)=36-32=4$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-6-2}{2\times(-2)}=\frac{-8}{-4}=2$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-6+2}{2\times(-2)}=\frac{-4}{-4}=1$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le signe de ce polynôme sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-2\cdot x^2+6\cdot x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, nous obtenons le signe de la fonction f' sur $\big[0{,}7\,;6\big]$:

x	$0{,}7$		1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations *(sans les ordonnées)* de la fonction f :

x	$0{,}7$		1		2		6
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Correction 10

1. Le dénominateur étant un polynôme du second degré, son discriminant a pour valeur :
$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times2\times3=4-24=-20<0$
Ce polynôme n'admet aucune racine : le dénominateur de ce quotient ne s'annule jamais.

On a en déduit que la fonction f est définie pour tout nombre réel : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

2. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définie par :
$u(x)=x^2-x+3 \quad ; \quad v(x)=2x^2-2x+3$
qui admette pour dérivée :
$u'(x)=2x-1 \quad ; \quad v'(x)=4x-2$

Ainsi, la formule de dérivation du quotient de fonctions donne l'expression de la fonction f' :

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}\\
&=\frac{(2x-1)(2x^2-2x+3)-(x^2-x+3)\times(4x-2)}{\big(3x^2+2x+1\big)^2}\\
&=\frac{\big(4x^3-4x^2+6x-2x^2+2x-3\big)-\big(4x^3-2x^2-4x^2+2x+12x-6\big)}{\big(3x^2+2x+1\big)^2}\\
&=\frac{\big(4x^3-6x^2+8x-3\big)-\big(4x^3-6x^2+14x-6\big)}{\big(3x^2+2x+1\big)^2}\\
&=\frac{4x^3-6x^2+8x-3-4x^3+6x^2-14x+6}{\big(3x^2+2x+1\big)^2}\\
&=\frac{-6x+3}{\big(3x^2+2x+1\big)^2}
\end{aligned}$$

3. (a.) Le dénominateur étant strictement positif *(voir question 1.)*, le signe de f' ne dépend que de son numérateur. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

(b.) L'image de 1 par la fonction f a pour valeur :

$$f\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{\Big(\frac{1}{2}\Big)^2-\frac{1}{2}+3}{2\times\Big(\frac{1}{2}\Big)^2-2\times\frac{1}{2}+3}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3}{2\times\frac{1}{4}-1+3}=\frac{\frac{1-2+12}{4}}{\frac{1}{2}+2}$$

$$=\frac{\frac{11}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{11}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{11}{10}$$

On a le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variation de f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

4. Ansi, la fonction f admet pour maximum 1, et atteint son maximum pour $x=\dfrac{1}{2}$.

Correction 11

1. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison -3. Ses premiers termes ont pour valeur :
   - $u_0 = 2$
   - $u_1 = u_0 + r = 2 + (-3) = -1$
   - $u_2 = u_1 + r = -1 + (-3) = -4$
   - $u_3 = u_2 + r = -4 + (-3) = -7$
2. (v_n) est la suite géométrique de premier terme 54 et de raison $\dfrac{1}{3}$. Ses premiers termes ont pour valeur :
   - $v_0 = 54$
   - $v_1 = q\times v_0 = \dfrac{1}{3}\times 54 = 18$
   - $v_2 = q\times v_1 = \dfrac{1}{3}\times 18 = 6$
   - $v_2 = q\times v_2 = \dfrac{1}{3}\times 6 = 2$

Correction 12

On a les cinq premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = 1$
- $u_1 = \dfrac{4\cdot u_0}{3\times 0-2} = \dfrac{4\times 1}{0-2} = \dfrac{4}{-2} = -2$
- $u_2 = \dfrac{4\cdot u_1}{3\times 1-2} = \dfrac{4\times(-2)}{3-2} = \dfrac{-8}{1} = -8$
- $u_3 = \dfrac{4\cdot u_2}{3\times 2-2} = \dfrac{4\times(-8)}{6-2} = \dfrac{-32}{4} = -8$
- $u_4 = \dfrac{4\cdot u_3}{3\times 3-2} = \dfrac{4\times(-8)}{9-2} = \dfrac{-32}{7} = -\dfrac{32}{7}$

Correction 13

On a les cinq premiers termes de la suite (v_n) :

- $v_0 = 1$
- $v_1 = \dfrac{3\cdot v_0}{2\times 0-3} = \dfrac{3\times 1}{0-3} = \dfrac{3}{-3} = -1$
- $v_2 = \dfrac{3\cdot v_1}{2\times 1-3} = \dfrac{3\times(-1)}{2-3} = \dfrac{-3}{-1} = 3$
- $v_3 = \dfrac{3\cdot v_2}{2\times 2-3} = \dfrac{3\times 3}{4-3} = \dfrac{9}{1} = 9$
- $v_4 = \dfrac{3\cdot v_3}{2\times 3-3} = \dfrac{3\times 9}{6-3} = \dfrac{27}{3} = 9$
- $v_5 = \dfrac{3\cdot v_4}{2\times 4-3} = \dfrac{3\times 9}{8-3} = \dfrac{27}{5}$

Correction 14

1. On a la simplification :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= (n+1)^3 - 2(n+1)^2 - 3(n+1) - \big(n^3-2n^2-3n\big)\\
&= (n+1)\big(n^2+2n+1\big)-2(n^2+2n+1)-3(n+1)-n^3+2n^2+3n\\
&= \big(n^3+2n^2+n+n^2+2n+1\big)\text{-}2n^2\text{-}4n\text{-}2\text{-}3n\text{-}3\text{-}n^3+2n^2+3n\\
&= n^3+2n^2+n+n^2+2n+1-2n^2-4n-2-3n-3-n^3+2n^2+3n\\
&= 3n^2 - n - 4
\end{aligned}$$

2. Etudions le signe du polynôme du second degré obtenu à la question précédente ; calculons son discriminant :
   $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\times 3\times(-4) = (-1)^2-48 = 49$

   On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

   Le discriminant de ce polynôme du second degré étant positif, on en déduit les deux racines suivantes :

   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)-7}{2\times 3} = -1$

   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)+7}{2\times 3} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}3$

   Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme étant positif, on a le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x^2-x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Ainsi, la différence de deux termes consécutif est positif à partir du rang 2 : (u_n) est croissante à partir du rang 2.

Correction 15

1. Voici le tableau complété :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	-1	-3	-13	-183

2. L'étude de la différence de deux termes consécutifs donne :
   $u_{n+1} - u_n = \big(u_n - {u_n}^2 - 1\big) - u_n = -{u_n}^2 - 1 < 0$
   Ainsi, la différence de termes consécutifs de la suite est négatif, on en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

