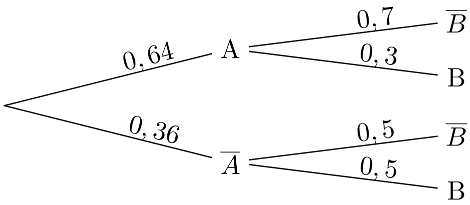
Correction 1

1. Voici l'arbre de probabilité associé à cette expérience aléatoire :

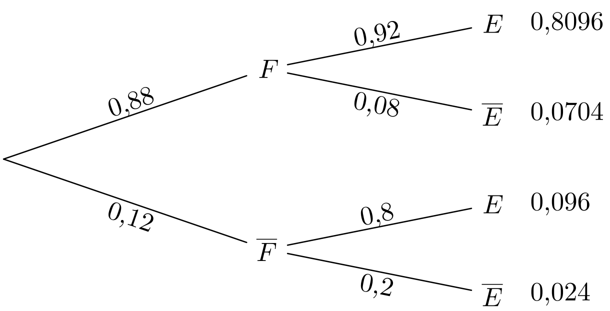


2. a. Par lecture de l'arbre de probabilité, on a :
   - $\mathcal{P}(A\cap B) = \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(B) = 0{,}64\times0{,}3 = 0{,}192$
   - $\mathcal{P}(\overline{A}\cap B) = \mathcal{P}(\overline{A})\times\mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}36\times0{,}5 = 0{,}18$

   b. A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω. D'après la formule des probabilités totales, on a la formule :
   $$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A\cap B) + \mathcal{P}(\overline{A}\cap B) = 0{,}192 + 0{,}18$$
   $$= 0{,}372$$

Correction 2

1.



2. a. On a la formule : $\mathcal{P}(\overline{F})=1-\mathcal{P}(F)=1-0{,}88=0{,}12$

   b. $\mathcal{P}_{\overline{F}}(\overline{E}) = 1 - \mathcal{P}_{\overline{F}}(E) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

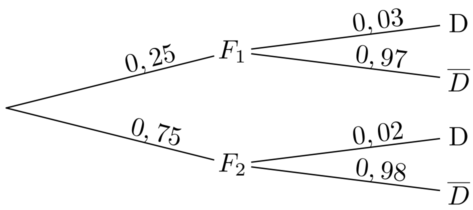
   c. D'après la formule de la probabilité conditionnelle, on a :
   $$\mathcal{P}(E\cap F) = \mathcal{P}_F(E)\times\mathcal{P}(F) = 0{,}92\times0{,}88 = 0{,}8096$$

   d. De même que dans la question précédente, on obtient :
   $$\mathcal{P}(E\cap\overline{F}) = \mathcal{P}_{\overline{F}}(E)\times\mathcal{P}(\overline{F}) = 0{,}096$$
   Les événements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a :
   $$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E\cap F) + \mathcal{P}(E\cap\overline{F}) = 0{,}8096 + 0{,}096$$
   $$= 0{,}9056$$

   e. Tout conducteur ayant au moins ses freins ou son éclairage défectueux fait parti de l'ensemble $\overline{E}\cup\overline{F}$. Hors le complémentaire de cet événement $E\cap F$: c'est à dire que les freins et l'éclairage sont tous les deux en bon état. On obtient :
   $$\mathcal{P}(\overline{E}\cup\overline{F}) = 1 - \mathcal{P}(E\cap F) = 1 - 0{,}8096 = 0{,}1904$$

Correction 3

1. Voici l'arbre de probabilité associé à cette épreuve aléatoire :



2. Dáprès l'arbre de probabilité, on a les deux probabilités suivantes :
   - $\mathcal{P}(D\cap F_1) = \mathcal{P}(F_1)\cdot\mathcal{P}_{F_1}(D) = 0{,}25\times0{,}03 = 0{,}007\,5$
   - $\mathcal{P}(D\cap F_2) = \mathcal{P}(F_2)\cdot\mathcal{P}_{F_2}(D) = 0{,}75\times0{,}02 = 0{,}015$

   F_1 et F_2 forment une partition de l'univers Ω. D'après la formule de probabilité totale, on a :
   $$\mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(F_1\cap D) + \mathcal{P}(F_2\cap D)$$
   $$= 0{,}007\,5 + 0{,}015 = 0{,}022\,5$$

3. La formule des probabilités conditionnelles permet d'obtenir la valeur de la probabilité suivante :
   $$\mathcal{P}_D(F_1) = \frac{\mathcal{P}(D\cap F_1)}{\mathcal{P}(D)} = \frac{0{,}007\,5}{0{,}0225} \approx 0{,}333$$

Correction 4

1. On a les coordonnées suivantes de vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$
     $= (5-3\,;\,-1-2) = (2\,;\,-3)$
   - $\overrightarrow{AC}(-2-3\,;3-2) = (-5\,;1)$
   - $\overrightarrow{BC}(-2-5\,;3-(-1)) = (-7\,;4)$

2. Voici les calculs des produits scalaires demandés :
   - $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-5) + (-3)\times1 = -10 - 3 = -13$
   - $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \big(-\overrightarrow{AB}\big)\cdot\overrightarrow{BC} = -\big(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\big)$
     $= -\big(2\times(-7) + (-3)\times4\big) = -\big[-14 + (-12)\big]$
     $= -\big(-26\big) = 26$
   - $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = \big(-\overrightarrow{BC}\big)\cdot\big(-\overrightarrow{AC}\big) = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$
     $= (-7)\times(-5) + 4\times1 = 35 + 4 = 39$

3. Le calcul de distance permette d'effectuer les calculs suivants :
   - $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
     $= \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
   - $AC = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
   - $BC = \sqrt{(-7)^2 + 4^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$

4. En utilisant l'autre formule donnant le produit scalaire, on obtient :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$
$$-13 = \sqrt{13}\times\sqrt{26}\times\cos\widehat{BAC}$$
$$\cos\widehat{BAC} = \frac{-13}{\sqrt{13}\times\sqrt{26}}$$
$$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\Big(\frac{-13}{\sqrt{13}\times\sqrt{26}}\Big)$$
$$\widehat{BAC} \approx 135^o$$
- $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$
$$26 = \sqrt{13}\times\sqrt{65}\times\cos\widehat{ABC}$$
$$\cos\widehat{ABC} = \frac{26}{\sqrt{13}\times\sqrt{65}}$$
$$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\Big(\frac{26}{\sqrt{13}\times\sqrt{65}}\Big)$$
$$\widehat{ABC} \approx 26{,}565^o$$
$$\widehat{ABC} \approx 27^o$$
- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} = BC\times AC\times\cos\widehat{BCA}$
$$39 = \sqrt{65}\times\sqrt{26}\times\cos\widehat{BCA}$$
$$\cos\widehat{BCA} = \frac{39}{\sqrt{65}\times\sqrt{26}}$$
$$\widehat{BCA} = \cos^{-1}\Big(\frac{39}{\sqrt{65}\times\sqrt{26}}\Big)$$
$$\widehat{ABC} \approx 18{,}435^o$$
$$\widehat{ABC} \approx 18^o$$

Remarque : la mesure du dernier angle aurait pû être déduite de la supplémentarité des angles.

Correction 5

Une video est accessible

1. On a les coordonnées suivantes des vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}(x_B{-}x_A\,;y_B{-}y_A)=(1\,;-4)$
   - $\overrightarrow{AD}(x_D{-}x_A\,;y_D{-}y_A)=(4\,;1)$

   Ainsi, on a la valeur du produit scalaire suivant :
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AB}}\cdot x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AB}}\cdot y_{\overrightarrow{AD}}$$
   $$= 1\times4+(-4)\times1 = 0$$

2. Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$:
   $$\overrightarrow{DC}(x_C-x_D\,;y_C-y_D) = (1\,;-4)$$

   On remarque ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même coordonnées : ces deux vecteurs sont égaux ; on en déduit que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

   Or, d'après la question 1., les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux : l'angle $\widehat{BAD}$ est droit.

   Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme et il possède un angle droit : $ABCD$ est un rectangle.

Correction 6

Une video est accessible

1. Le point K milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :
   $$K\Big(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\Big) = \Big(\frac{-2+4}{2}\,;\frac{-3+1}{2}\Big)$$
   $$= \Big(\frac{2}{2}\,;\frac{-2}{2}\Big) = (1\,;-1)$$

2. La médiatrice du segment $[AB]$ étant une droite perpendiculaire à la droite (AB), on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur orthogonal à la droite (d).
   $$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A) = (4-(-2)\,;1-(-3))$$
   $$= (4+2\,;1+3) = (6\,;4)$$

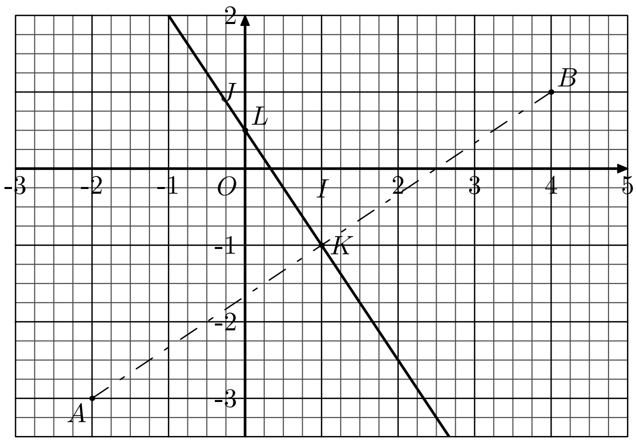
3. On en déduit que la droite (d) admet pour équation cartésienne, une équation de la forme suivante :
   $6{\cdot}x+4{\cdot}y+c=0 \quad$ où $c\in\mathbb{R}$.

   Le point K appartenant à la droite (d), ses coordonnées vérifient cette équation :
   $$6{\cdot}x_K+4{\cdot}y_K+c=0$$
   $$6\times1+4\times(-1)+c=0$$
   $$6-4+c=0$$
   $$2+c=0$$
   $$c=-2$$

   La droite (d) admet pour équation cartésienne :
   $6{\cdot}x+4{\cdot}y-2=0$

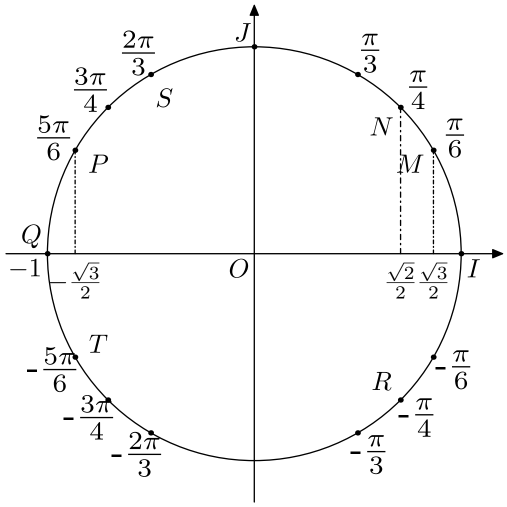
4. Le point K appartient à la droite (d). Déterminons les coordonnées du point L d'abscisse 0 appartenant à la droite (d). On a :
   $$6{\cdot}x_L+4{\cdot}y_L-2=0$$
   $$6\times0+4{\cdot}y_L-2=0$$
   $$4{\cdot}y_L-2=0$$
   $$4{\cdot}y_L=2$$
   $$y_L=\frac{1}{2}$$

   Voici la représentation de la droite (d) dans le repère :



Correction 7

- Pour déterminer les cosinus des angles, nous utiliserons l'abscisse des points correspondants sur le cercle trigonométrique :



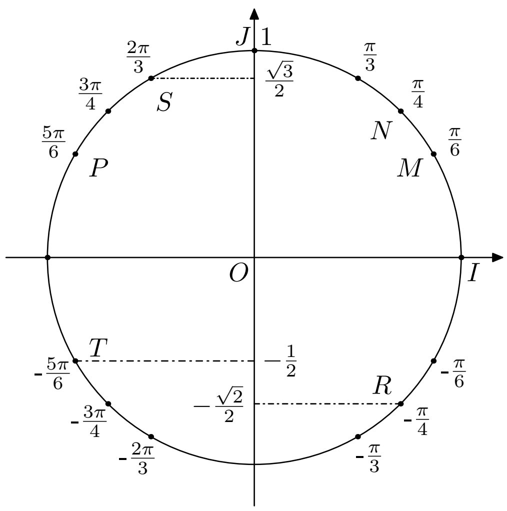
a. Le point M est repéré par l'angle $\frac{\pi}{6}$. L'abscisse du point M a pour valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. Le point N est repéré par l'angle $\frac{\pi}{4}$. L'abscisse du point N a pour valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. Le point P est repéré par l'angle $\frac{5\pi}{6}$. L'abscisse du point P a pour valeur $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit : $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. Le point Q est repéré par l'angle π. L'abscisse du point Q a pour valeur -1.
On en déduit : $\cos\left(\pi\right) = -1$

- Pour déterminer les cosinus des angles, nous utiliserons l'abscisse des points correspondants sur le cercle trigonométrique :



e. Le point R est repéré par l'angle $-\frac{\pi}{4}$. L'ordonnée du point R a pour valeur $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit : $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f. Le point S est repéré par l'angle $\frac{2{\cdot}\pi}{3}$. L'ordonnée du point S a pour valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit : $\sin\left(\frac{2{\cdot}\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g. Le point T est repéré par l'angle $-\frac{5\pi}{6}$. L'ordonnée du point T a pour valeur $-\frac{1}{2}$.
On en déduit : $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

h. Le point J est repéré par l'angle $\frac{\pi}{2}$. L'ordonnée du point J a pour valeur 1.
On en déduit : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Correction 8

a. L'égalité de l'énoncé :
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
admet également l'expression :
$$\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$$
Ainsi, les solutions de cette équation admettent une des deux expressions suivantes où $k\in\mathbb{Z}$:
$$x = \frac{\pi}{3} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \quad\Bigg|\quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi = \frac{2\pi}{3} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$$
L'ensemble des solutions de cette équation admet pour expression :
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3}+2{\cdot}k{\cdot}\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3}+2{\cdot}k{\cdot}\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

b. L'égalité de l'énoncé :
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
admet pour expression :
$$\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$$
Ainsi, les solutions de cette équation admettent une des deux expressions suivantes où $k\in\mathbb{Z}$:
$$x = \frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$$
L'ensemble des solutions de cette équation admet pour expression :
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4}+2{\cdot}k{\cdot}\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4}+2{\cdot}k{\cdot}\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Correction 9

1. a. L'équation de l'énoncé :
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
admet pour expression :
$$\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$$
On en déduit les deux solutions dans l'intervalle des mesures principales :
$$x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{4}$$
L'ensemble des solutions de l'équation est :
$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right\}$$

b. L'équation de l'énoncé :

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$
admet pour expression :
$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
On en déduit les deux solutions :

$$x = -\frac{\pi}{6} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} x &= \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ x &= \pi + \frac{\pi}{6} \\ x &= \frac{6\pi+\pi}{6} \\ x &= \frac{7\pi}{6} \\ x &= -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :
$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{5\pi}{6} \,;\, -\frac{\pi}{6}\right\}$$

c. L'équation de l'énoncé :
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
admet pour expression :
$$\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$$
On en déduit les deux solutions :

$$x = \frac{\pi}{3} \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} x &= \pi - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{3\pi-\pi}{3} \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3} \,;\, \frac{2\pi}{3}\right\}$$

d. L'équation de l'énoncé :
$$\cos x = -\frac{1}{2}$$
admet pour expression :
$$\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$$
On en déduit les deux solutions de cette équation :
$$x = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad x = -\frac{2\pi}{3}$$
Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{2\pi}{3} \,;\, -\frac{2\pi}{3}\right\}.$$

2. a. L'égalité de l'énoncé :
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
donne l'égalité :
$$\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$$
Ainsi, le nombre x doit vérifier l'une des deux équations où k représente un entier relatif quelconque :
$$x = \frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$$
Ainsi, l'ensemble des solutions admet pour expression :
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6}+2{\cdot}k{\cdot}\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6}+2{\cdot}k{\cdot}\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

b. L'égalité de l'énoncé :
$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
donne l'égalité :
$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
Ainsi, le nombre x doit vérifier l'une des deux équations où k représente un entier relatif quelconque :

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \quad\Bigg|\quad \begin{aligned} x &= \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \\ &= \pi + \frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \\ &= \frac{5\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \\ &= 2\pi - \frac{3\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \\ &= -\frac{3\pi}{4} + 2{\cdot}(k+1){\cdot}\pi \\ &= -\frac{3\pi}{4} + 2{\cdot}k'{\cdot}\pi \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions admet pour expression :
$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4}+2{\cdot}k{\cdot}\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{3\pi}{4}+2{\cdot}k{\cdot}\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

