# Preparer son entree en TS - Mathematiques - Partie 1 - S PLUOT

## Correction 1

a. Cherchons les racines de $x^2+4x-5$ :

Le discriminant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\times1\times(-5) = 16+20 = 36$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :
$S=\{-5\,;1\}$

b. Cherchons les racines de $2x^2-13x+15$ :

Le discriminant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = (-13)^2-4\times2\times15 = 169-120 = 49$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+7}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :
$S=\left\{\frac{3}{2}\,;5\right\}$

c. Cherchons les racines de $x^2+x+1$ :

Le discriminant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times1\times1 = -3$

Le discriminat de ce trinôme est strictement négatif ; il n'admet aucune racine. L'ensemble des solutions de l'équation $x^2+x+1=0$ est vide :
$S=\varnothing$

d. Cherchons les racines de $x^2+5x+2$ :

Le discriminant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\times1\times2 = 25-8 = 17 > 0$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{17}}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :
$S=\left\{\frac{-5-\sqrt{17}}{2}\,;\frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right\}$

e. Cherchons les racines du polynômes $-3x^2+6x-2$ :

Le discriminant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = 6^2-4\times(-3)\times(-2) = 36-24 = 12 > 0$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-2\sqrt{3}}{-6} = 1+\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+2\sqrt{3}}{-6} = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :
$S=\left\{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

f. Cherchons les racines de $3x^2-2x+1$ :

Le discriminant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times3\times1 = 4-12 = -8 < 0$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ; l'ensemble des solutions de cette équation est vide :
$S=\varnothing$

## Correction 2

1. Donnons la forme développée et de l'expression suivante :

$$\begin{aligned}(x+2)\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big) &= \big(a{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2+c{\cdot}x\big)+\big(2a{\cdot}x^2+2b{\cdot}x+2c\big)\\ &= a{\cdot}x^3+\big(b+2a\big){\cdot}x^2+\big(c+2b\big){\cdot}x+2c\end{aligned}$$

En identifiant terme à terme la forme réduite obtenue précédemment et l'expression de $P$, on remarque que les valeurs de $a$, $b$, $c$ doivent vérifier la relation suivante :

$$\begin{cases} a = 3 \\ b+2a = 1 \\ c+2b = -8 \\ 2c = 4 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient :
$a=3$ ; $b=-5$ ; $c=2$

Ainsi, on obtient l'égalité suivante :
$P(x) = (x+2)\big(3x^2-5x+2\big)$

2. Cherchons les racines du polynome $3x^2-5x+2$ ; ce trinôme a un discriminant valant :
$\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4\times3\times2 = 25-24 = 1$

Ainsi, il admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{6} = 1$$

Il est maintenant possible d'exprimer $P(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du premier degré :

$$P(x) = (x+2)\Big(x-\frac{2}{3}\Big)(x-1)$$

En utilisant la propriété "*Un produit est nul, si et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul*", on obtient l'ensemble des zéros du polynôme $P$ :

$$S = \Big\{-2\,;\frac{2}{3}\,;1\Big\}$$

## Correction 3

**a.** Etudions le trinôme $2x^2-8x+2$. Son discriminant vaut :

$$\Delta = b^2-4ac = (-8)^2-4\times2\times2 = 64-16 = 48$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Le discriminant de cette expression est strictement positif ; ce polynôme admet deux racines de ce trinôme du second degré sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$$

Le coefficient du terme du second degré est positif. On obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2-8x+2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

L'ensemble des solutions de l'inéquation sont :

$$S = \big]-\infty\,;2-\sqrt{3}\big]\cup\big[2+\sqrt{3}\,;+\infty\big[$$

**b.** Etudions séparemment les trinômes formant le numérateur et le dénominateur :

- Le discriminant de $3x^2-5x+2$ est :
  $$\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4\times3\times2 = 25-24 = 1$$
  On remarque que : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

  Ce discriminant est strictement positif ; ce trinôme admet deux racines qui sont :

  $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$$

  $$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{6} = 1$$

  Le coefficient du terme de degré 2 est positif ; cette expression est négative entre ses racines.

- Le discriminant de $-3x^2+4x-2$ est :
  $$\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\times(-3)\times(-2) = 16-24 = -8 < 0$$
  Le discrimant étant négatif ; l'expression n'admet aucune racine. Ainsi, cette expression a le signe de son coefficient du terme de degré 2 pour tout valeur $x\in\mathbb{R}$.

Le coefficient du terme du second degré du numérateur est positif alors que celui du dénominateur est négatif. On obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2-5x+2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $-3x^2-4x+2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $\dfrac{3x^2-5x+2}{-3x^2-4x+2}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

L'ensemble des solutions de l'équation de départ est :

$$S = \Big]-\infty\,;\frac{2}{3}\Big]\cup\big[1\,;+\infty\big[$$

**c.** Par manipulation algébrique, nous allons transformer l'expression de cette inéquation afin d'obtenir un produit/quotient plus compatible à l'étude du signe d'une expression :

$$\frac{2x-5}{2x-1} < \frac{x+1}{x+3}$$

$$\frac{2x-5}{2x-1} - \frac{x+1}{x+3} < 0$$

$$\frac{(2x-5)(x+3)}{(2x-1)(x+3)} - \frac{(x+1)(2x-1)}{(x+3)(2x-1)} < 0$$

$$\frac{2x^2+x-15}{(2x-1)(x+3)} - \frac{2x^2+x-1}{(x+3)(2x-1)} < 0$$

$$\frac{2x^2+x-15-2x^2-x+1}{(x+3)(2x-1)} < 0$$

$$\frac{-14}{(x+3)(2x-1)} < 0$$

Faisons directement le tableau de signe en étudiant les facteurs de degré un constituant cette fraction rationnelle :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-14$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\dfrac{2x-5}{2x-1}-\dfrac{x+1}{x+3}$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |

L'ensemble des solutions est :

$$S = \big]-\infty\,;-3\big[\cup\Big]\frac{1}{2}\,;+\infty\Big[$$

## Correction 4

**1.** (a.) Déterminons les zéros de la fonction $f$. L'image d'un nombre $x$ par la fonction $f$ est définie par le polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = \Big(\frac{3}{2}\Big)^2-4\times1\times(-1) = \frac{9}{4}+4 = \frac{25}{4}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \\ &= \frac{-\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}}{2\times1} \\ &= \frac{-\dfrac{8}{2}}{2} \\ &= \frac{-4}{2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \\ &= \frac{-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}}{2\times1} \\ &= \frac{\dfrac{2}{2}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b. Déterminons les zéros de la fonction $f$. L'image d'un nombre $x$ par la fonction $g$ a pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2-4\times\Big(-\frac{1}{2}\Big)\times1 = 1+2 = 3$$

Le discriminant étant strictement positif, cette fonction admet les deux zéros suivant :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \\ &= \frac{-1-\sqrt{3}}{2\times\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)} \\ &= \frac{-1-\sqrt{3}}{-1} \\ &= 1+\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}}{2\times\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}}{-1} \\ &= 1-\sqrt{3} \end{aligned}$$

2. Pour étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, nous sommes emmenés à étudier la différence $f-g$.

On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= x^2+\frac{3}{2}{\cdot}x-1-\Big(-\frac{1}{2}{\cdot}x^2+x+1\Big) \\ &= x^2+\frac{3}{2}{\cdot}x-1+\frac{1}{2}{\cdot}x^2-x-1 \\ &= \frac{3}{2}{\cdot}x^2+\frac{1}{2}{\cdot}x-2 \end{aligned}$$

Ce polynôme du second degré a pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = \Big(\frac{1}{2}\Big)^2-4\times\frac{3}{2}\times(-2) = \frac{1}{4}+12 = \frac{49}{4}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\dfrac{49}{4}} = \dfrac{7}{2}$

Le discriminant étant positive, on a les deux racines suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \\ &= \frac{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2}}{2\times\dfrac{3}{2}} \\ &= \frac{-\dfrac{8}{2}}{3} \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \\ &= \frac{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}}{2\times\dfrac{3}{2}} \\ &= \frac{\dfrac{6}{2}}{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Le coefficient du terme du second degré du polynôme définisant la différence $f-g$ étant positif, on a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{4}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ :

- Sur chacun des deux intervalles $\Big]-\infty\,;-\dfrac{4}{3}\Big]$ et $[1\,;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.
- Sur l'intervalle $\Big[-\dfrac{4}{3}\,;1\Big]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

## Correction 5

1. Graphiquement, on obtient le tableau de variation de la fonction $f$ :

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $3$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

2. a. L'expression de la fonction $f$ est donnée sous la forme d'une somme ; on dérive donc l'expression de la fonction $f$ terme à terme :

$$f'(x) = \frac{1}{3}{\cdot}(3x^2)-(2x)-3 = x^2-2x-3$$

b. L'expression de la fonction $f'$ est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-2)^2-4\times1\times(-3) = 4+12 = 16$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

Le discriminant étant strictement positif, le polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \\ &= \frac{-(-2)-4}{2\times1} \\ &= \frac{2-4}{2} \\ &= \frac{-2}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \\ &= \frac{-(-2)+4}{2\times1} \\ &= \frac{2+4}{2} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Le signe du coefficient du terme du second degré étant positif, on obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

3. On remarque une correspondance entre signe de la dérivée et variation de la fonction :

- Lorsque la fonction $f'$ est positive alors la fonction $f$ est croissante ;
- Lorsque la fonction $f'$ est négative alors la fonction $f$ est décroissante.

## Correction 6

1. Le point $M$ a pour abscisse $x$ et appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ ; ainsi, le point $M$ a pour coordonnées :

$$M\Big(x\,;\frac{1}{x^2-x+1}\Big)$$

Ainsi, le rectangle formé par le point $M$ a pour dimensions $x$ et $\dfrac{1}{x^2-x+1}$. Son aire a pour valeur :

$$\mathcal{A}(x) = x\times\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{x}{x^2-x+1}$$

2. a. L'expression de la fonction $\mathcal{A}$ est donnée sous la

forme du quotient des fonctions $u$ et $v$ définies par :
$u(x)=x \quad ; \quad v(x)=x^2-x+1$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=2x-1$
La fonction $\mathcal{A}$ admet pour dérivée la fonction $\mathcal{A}'$ dont l'expression est donnée par la formule :

$$\mathcal{A}'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$=\frac{1\times(x^2-x+1)-x\times(2x-1)}{\big(x^2-x+1\big)^2}$$

$$=\frac{x^2-x+1-2x^2+x}{\big(x^2-x+1\big)^2}=\frac{-x^2+1}{\big(x^2-x+1\big)^2}$$

b. Le dénominateur de ce quotient est strictement positif sur $\mathbb{R}_+$.
Le polynôme $-x^2+1$ admet pour racines $-1$ et $1$. Son coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on obtient le tableau de signe suvant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\mathcal{A}'(x)$ | | | | | | $+$ | $0$ | $-$ | |

c. On a la valeur suivante :

$$\mathcal{A}(1)=\frac{1}{1^2-1+1}=\frac{1}{1}=1$$

Le signe de la fonction dérivée permet de déterminer le sens de variation de la fonction $f$. On obtient le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $\mathcal{A}$ | | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | |

3. Pour que l'aire du rectangle soit maximale, il est nécessaire que le point $M$ ait pour abscisse $1$.

## Correction 7

1. a. Les cinq premiers termes de cette suite ont pour valeurs :

- $u_0=1$
- $u_1=2\cdot u_0+3^0=2\times1+1=3$
- $u_2=2\cdot u_1+3^1=2\times3+3=6+3=9$
- $u_3=2\cdot u_2+3^2=2\times9+9=18+9=27$
- $u_4=2\cdot u_3+3^3=2\times27+27=54+27=81$

b. En remarquant que le quotient de deux termes consécutifs de la suite est constant :

$$\frac{u_1}{u_0}=3 \quad ; \quad \frac{u_2}{u_1}=3 \quad \dots$$

On peut conjecturer que la suite $(u_n)$ est la suite géométrique de premier terme $1$ et de raison $3$.

2. Soit $(v_n)$ la suite géométrique de premier terme $1$ et de raison $3$. Son terme de rang $n$ a pour expression :
$v_n=3^n$

On a les transformations algébriques suivantes :

$$2\cdot v_n+3^n=2\times3^n+3^n=\big(2+1\big)\cdot3^n=3\times3^n$$

$$=3^{n+1}=v_{n+1}$$

## Correction 8

1. La suite $(u_n)$ étant une suite arithmétique de premier terme $-3$ et de raison $4$, son terme de rang $n$ s'écrit :
$u_n=-3+4\cdot n$

2. Notons $n$ le rang du terme de la suite $(u_n)$ valant $605$. On doit avoir la relation :

$$u_n=605$$
$$-3+4\cdot n=605$$
$$4\cdot n=605+3$$
$$4\cdot n=608$$
$$n=\frac{608}{4}$$
$$n=152$$

3. Le terme de rang $100$ a pour valeur :
$u_{100}=-3+100\times4=-3+400=397$

La formule de la somme des termes d'une suite arithmétique donne :

$$S=u_0+u_1+\cdots+u_{100}$$

$$=\frac{(100+1)\big(u_0+u_{100}\big)}{2}=\frac{101\times\big(-3+397\big)}{2}$$

$$=\frac{101\times394}{2}=101\times197=19897$$

## Correction 9

1. Voici les cinq premiers termes de la suite $(u_n)$ :

- $u_0=0$
- $u_1=-\frac{1}{2}\cdot u_0+1=-\frac{1}{2}\times0+1=1$
- $u_2=-\frac{1}{2}\cdot u_1+1=-\frac{1}{2}\times1+1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$
- $u_3=-\frac{1}{2}\cdot u_2+1=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$
- $u_4=-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+1=-\frac{3}{8}+1=\frac{5}{8}$

2. a. Voici les quatre premiers termes de la suite $(v_n)$ :

- $v_0=u_0-\frac{2}{3}=0-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$
- $v_1=u_1-\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}=\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$
- $v_2=u_2-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3}{6}-\frac{4}{6}=-\frac{1}{6}$
- $v_3=u_3-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}$

b. D'après la définition de la suite $(v_n)$, le terme de rang $n+1$ admet l'expression :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{2}{3}=\Big(-\frac{1}{2}\cdot u_n+1\Big)-\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot u_n+1-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\cdot u_n+\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\cdot\Big(u_n-\frac{2}{3}\Big)=-\frac{1}{2}\cdot v_n$$

c. La suite $(v_n)$ est la suite géométrique de premier terme $-\frac{2}{3}$ et de raison $-\frac{1}{2}$.

3. a. La suite $(v_n)$ étant géométrique de raison différent de $1$, la somme $S'$ composée des quinze premiers termes de cette suite admet pour valeur :

$$S' = v_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = -\frac{2}{3} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{15}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= -\frac{2}{3} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{15}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{15}}{\frac{3}{2}}$$
$$= -\frac{2}{3} \times \left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{15}\right] \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{9} \cdot \left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{15}\right]$$

b. Etudions la suite $S$ :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{14}$$
$$= \left(v_0 + \frac{2}{3}\right) + \left(v_1 + \frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(v_{14} + \frac{2}{3}\right)$$
$$= \left(v_0 + v_1 + \cdots + v_{14}\right) + 15 \times \frac{2}{3}$$
$$= \left(v_0 + v_1 + \cdots + v_{14}\right) + 5 \times 2$$
$$= S + 10 = -\frac{4}{9} \cdot \left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{15}\right] + 10$$

4. a. La suite $\left(v_n\right)$ étant géométrique de premier terme $-\frac{2}{3}$ et de raison $-\frac{1}{2}$, on en déduit l'expression du terme de rang $n$ de la suite $\left(v_n\right)$ :

$$v_n = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

b. En partant de la définition de la suite $\left(u_n\right)$ :

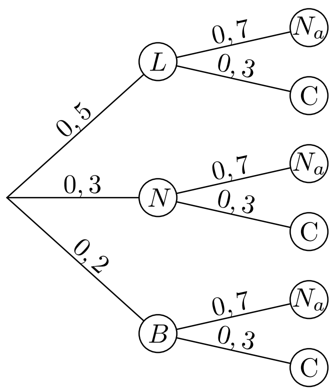
$$v_n = u_n - \frac{2}{3}$$
$$u_n = v_n + \frac{2}{3}$$
$$u_n = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$$

## Correction 10

La correction n'existe pas pour l'exercice 4644

## Correction 11

1. On a l'arbre pondéré suivant :




2. a. Cet évènement est obtenu par l'intersection $N \cap N_a$. D'après l'arbre pondérée, on a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}\left(N \cap N_a\right) = 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$$

b. Cet évènement est obtenu par la réunion $N \cup N_a$. On peut décomposer cet évènement comme la réunion des évènements disjoints entre eux suivants :

$$N \cup N_a = N \bigcup \left(L \cap N_a\right) \bigcup \left(B \cap N_a\right)$$

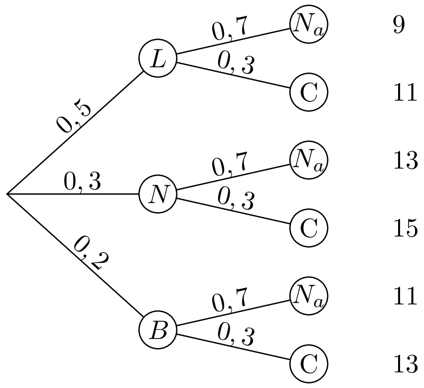
D'après l'énoncé et l'arbre de probabilité de la question précédente, on a les probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(N) = 0{,}3$
- $\mathcal{P}(L \cap N_a) = 0{,}35$
- $\mathcal{P}(B \cap N_a) = 0{,}14$

Ces évènements étant disjoints entre eux, on a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(N \cup N_a) = \mathcal{P}(N) + \mathcal{P}(L \cap N_a) + \mathcal{P}(B \cap N_a)$$
$$= 0{,}3 + 0{,}35 + 0{,}14 = 0{,}79$$

3. a. Voici l'arbre de pondération sur lequel a été rajouté le prix, sur la colonne de droite, de chacune de ces boites :




Ainsi, les valeurs prises par la variable aléatoire sont :

9 ; 11 ; 13 ; 15

On obtient le tableau ci-dessous donnant la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ :

| $k$ | 9 | 11 | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}k)$ | 0,35 | 0,29 | 0,27 | 0,09 |

b. Ainsi, l'espérance de cette variable aléatoire a pour valeur :

$$E(\mathcal{X}) = 9 \cdot \mathcal{P}\left(\mathcal{X}{=}9\right) + 11 \cdot \mathcal{P}\left(\mathcal{X}{=}11\right) + 13 \cdot \mathcal{P}\left(\mathcal{X}{=}13\right) + 15 \cdot \mathcal{P}\left(\mathcal{X}{=}15\right)$$
$$= 9 \times 0{,}35 + 11 \times 0{,}29 + 13 \times 0{,}27 + 15 \times 0{,}09 = 11{,}2$$

Ainsi, en prenant une boîte de chocolat au hasard à la sortie de l'usine, elle devrait coûter 11,2 €.

## Correction 12

1. La probabilité de choisir un sac défectueux est de 0,03. Ainsi, le fait de tirer au hasard un sac et de regarder s'il est défectueux ou non est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,03.

La production étant suffisamment grande pour supposer le prélèvement de 100 sacs à un tirage avec remise, on modélise ce prélèvement par un schéma de Bernoulli de paramètre 100 et 0,03.

La variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre de sacs défectueux sur ce prélèvement, elle suit une loi binomiale de paramètre 100 et 0,03.

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\left(100\,;0{,}03\right)$$

2. L'évenement "*au moins un sac est défectueux*" est caractérisée par des valeurs de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ supérieure ou égale à 1. Ainsi, la probabilité recherchée est $\mathcal{P}\left(\mathcal{X}{\geqslant}1\right)$.

Les deux évènements $\left\{\mathcal{X}{<}1\right\}$ et $\left\{\mathcal{X}{\geqslant}1\right\}$ sont complémentaires. On en déduit :

$$\mathcal{P}\left(\mathcal{X}{\geqslant}1\right) = 1 - \mathcal{P}\left(\mathcal{X}{<}1\right) = 1 - \mathcal{P}\left(\mathcal{X}{=}0\right)$$
$$= 1 - \binom{100}{0} \times 0{,}03^0 \times 0{,}97^{100} = 1 - 0{,}97^{100}$$
$$\approx 0{,}95244 \approx 0{,}95$$

Cela signifie que sur un lot de 100 sacs, il y a 95 % de chances d'avoir au moins un sac qui soit défectueux.

3. Les propriétés des variables aléatoires suivant une loi binomiale permettent d'obtenir directement l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ :
$E(\mathcal{X}) = n\times p = 100\times 0{,}03 = 3$

Ainsi, par prélèvement de 100 sachets, en moyenne on trouvera 3 sachets défectueux.

## Correction 13

- **Algorithme 1 :**

Cet algorithme permet de construire les termes de la suite $(u_n)$ de premier terme 4 et vérifiant la formule de récurrence :
$u_{n+1} = u_n + 3$

La suite $(u_n)$ est la suite arithmétique de premier terme 4 et de raison 3.
La boucle, s'éxécutant 53 fois, permet de construire les termes de la suite $(u_n)$ en partant du terme $u_0$ :
$u_0 \rightsquigarrow u_1 \rightsquigarrow u_2 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow u_{53}$

La formule explicite des termes d'une suite arithmétique permet d'obtenir la valeur du terme de rang 53 de la suite $(u_n)$ :
$u_{53} = 4 + 53\times 3 = 4 + 159 = 163$

En fin d'exécution de l'algorithme, la variable `u` est affectée de la valeur 163.

- **Algorithme 2 :**

Cet algorithme permet de construire les termes de la suite $(u_n)$ de premier term 1 et définie par la formule de récurrence :
$u_{n+1} = 2\cdot u_n + 1$

La boucle s'exécutant 4 fois, l'algorithme calculera les termes suivant de la suite $(u_n)$ :

- $u_1 = 2\cdot u_0 + 1 = 2\times 1 + 1 = 2 + 1 = 3$
- $u_2 = 2\cdot u_1 + 1 = 2\times 3 + 1 = 6 + 1 = 7$
- $u_3 = 2\cdot u_2 + 1 = 2\times 7 + 1 = 14 + 1 = 15$
- $u_4 = 2\cdot u_3 + 1 = 2\times 15 + 1 = 30 + 1 = 31$

En fin d'exécution de cet algorithme, la variable `u` est affetée de la valeur 31.

## Correction 14

1. En fin d'exécution de l'algorithme, la variable `n` sera affecté du rang du premier terme égal ou dépassant la valeur 1 000.

2. Pour connaître le rang du premier terme supérieur à 5 000, voici l'algorithme modifié :

```
n ← 0
u ← 2
Tant que u<5000
    u ← 2×n
    n ← n+1
Fin Tant que
```