Preparer son entree en TS - Mathematiques - Partie 2 - S PLUOT

Correction 1

1. a. L'équation de l'énoncé :

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

admet pour expression :

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$$

On en déduit les deux solutions dans l'intervalle des mesures principales :

$$x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{4}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4} \,;\, \frac{\pi}{4}\right\}$$

b. L'équation de l'énoncé :

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

admet pour expression :

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

On en déduit les deux solutions :

$$x = -\frac{\pi}{6} \qquad \Bigg| \qquad x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{6\pi + \pi}{6}$$

$$x = \frac{7\pi}{6}$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{5\pi}{6} \,;\, -\frac{\pi}{6}\right\}$$

c. L'équation de l'énoncé :

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

admet pour expression :

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$$

On en déduit les deux solutions :

$$x = \frac{\pi}{3} \qquad \Bigg| \qquad x = \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{3\pi - \pi}{3}$$

$$= \frac{2\pi}{3}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3} \,;\, \frac{2\pi}{3}\right\}$$

d. L'équation de l'énoncé :

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

admet pour expression :

$$\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

On en déduit les deux solutions de cette équation :

$$x = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad x = -\frac{2\pi}{3}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{2\pi}{3} \,;\, -\frac{2\pi}{3}\right\}.$$

2. a. L'égalité de l'énoncé :

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

donne l'égalité :

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$$

Ainsi, le nombre x doit vérifier l'une des deux équations où k représente un entier relatif quelconque :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$$

Ainsi, l'ensemble des solutions admet pour expression :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b. L'égalité de l'énoncé :

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

donne l'égalité :

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi, le nombre x doit vérifier l'une des deux équations où k représente un entier relatif quelconque :

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \qquad \Bigg| \qquad x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$$

$$= \pi + \frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$$

$$= \frac{5\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$$

$$= 2\pi - \frac{3\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi$$

$$= -\frac{3\pi}{4} + 2{\cdot}(k+1){\cdot}\pi$$

$$= -\frac{3\pi}{4} + 2{\cdot}k'{\cdot}\pi$$

Ainsi, l'ensemble des solutions admet pour expression :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2{\cdot}k{\cdot}\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Correction 2

- On a les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3}{\cdot}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}{\cdot}\overrightarrow{BC}$$

- On a les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{3}{\cdot}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + 2{\cdot}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{2}{3}{\cdot}\overrightarrow{BA} + 2{\cdot}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{2}{3}{\cdot}\overrightarrow{BA} + 2{\cdot}\overrightarrow{AB} + 2{\cdot}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{2}{3}{\cdot}\overrightarrow{BA} - {\cdot}\overrightarrow{AB} + 2{\cdot}\overrightarrow{BC} = -\frac{4}{3}{\cdot}\overrightarrow{BA} + 2{\cdot}\overrightarrow{BC}$$

$$= 4{\cdot}\left(-\frac{1}{3}{\cdot}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}{\cdot}\overrightarrow{BC}\right) = 4{\cdot}\overrightarrow{MN}$$

La dernière égalité permet de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires : on en déduit que les droites (MN) et (MP) sont parallèles.

Les droites (MN) et (MP) étant parallèles et possédant un point commun, ces deux droites sont confondus : les points M, N et P sont alignés.

Correction 3

1. On a les coordonnées suivantes des vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A) = (1\,;-4)$
   - $\overrightarrow{AD}(x_D - x_A\,;y_D - y_A) = (4\,;1)$

   Ainsi, on a la valeur du produit scalaire suivant :
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AB}}\cdot x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AB}}\cdot y_{\overrightarrow{AD}}$$
   $$= 1\times 4 + (-4)\times 1 = 0$$

2. Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$:
   $$\overrightarrow{DC}(x_C - x_D\,;y_C - y_D) = (1\,;-4)$$

   On remarque ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même coordonnées : ces deux vecteurs sont égaux ; on en déduit que le quadrilatère $ABCd$ est un parallélogramme.

   Or, d'après la question 1., les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux : l'angle $\widehat{BAD}$ est droit.

   Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme et il possède un angle droit : $ABCD$ est un rectangle.

Correction 4

1. a. Déterminons les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$
   - $\overrightarrow{BA}(x_A - x_B\,;y_A - y_B) = (-2-1\,;3-(-4))$
     $= (-3\,;7)$
   - $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B\,;y_C - y_B) = (0-1\,;\,-2-(-4))$
     $= (-1\,;2)$

   On a ainsi les valeurs suivantes :
   - $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-3)\times(-1) + 7\times 2 = 17$
   - $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-3)^2+7^2} = \sqrt{58}$
   - $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$

   b. Le produit scalaire est donnée également à l'aide de la formule suivante :
   $$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos\widehat{ABC}$$
   $$17 = \sqrt{58}\times\sqrt{5}\times\cos\widehat{ABC}$$
   $$\cos\widehat{ABC} = \frac{17}{\sqrt{58}\times\sqrt{5}}$$
   Les fonctions trigonométriques inverses permettent d'obtenir la valeur de l'angle géométrique :
   $$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{17}{\sqrt{58}\times\sqrt{5}}\right) \approx 3{,}37^o$$

   c. A l'aide d'un dessin à la main, on se rend compte que l'angle $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$ est orienté positivement ; on a alors : $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right) = 3{,}37^o$

2. Le calcul des coordonnées des vecteurs donnent :
   $$\overrightarrow{DE}(-4\,;-5) \quad ; \quad \overrightarrow{DF}(-1\,;-1)$$

   Ainsi, le produit scalaire $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$ a pour valeur :
   $$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = (-4)\times(-1) + (-5)\times(-1) = 9$$
   La calcul des normes de vecteurs donne :
   - $\|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{(-4)^2+(-5)^2} = \sqrt{41}$
   - $\|\overrightarrow{DF}\| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

   Le produit scalaire de deux vecteurs est également déterminé par la formule suivante :
   $$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = DE\times DF\times\cos\widehat{EDF}$$
   $$9 = \sqrt{41}\times\sqrt{2}\times\cos\widehat{EDF}$$
   $$\cos\widehat{EDF} = \frac{9}{\sqrt{41}\times\sqrt{2}}$$
   Les fonctions trigonométriques inverses permettent d'écrire :
   $$\widehat{EDF} = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{41}\times\sqrt{2}}\right) \approx 6{,}34^o$$
   au centième de degré près.

   Un dessin à la main permet de montrer que l'angle $\left(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{DF}\right)$ est orienté positivement. Ainsi, on a :
   $$\left(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{DF}\right) = 6{,}34^o$$

