Preparer son entree en 1re en mathematiques - Partie 1 - S PLUOT

Correction 1

1. On a : $f(1) = 1^2 - 6\times 1 + 2 = 1 - 6 + 2 = -3$
L'image de 1 par la fonction f est -3

2. Deux méthodes sont possibles pour calculer les antécédents de -7 par la fonction f :
   - Pour obtenir l'ensemble des antécédents du nombre -7 pour la fonction f, nous devons effectuer la résolution algébrique de l'équation :
   $$x^2 - 6x + 2 = -7$$
   $$x^2 - 6x + 9 = 0$$
   $$(x-3)^2 = 0$$
   Un produit de facteur est nul si, et seulement, au moins un de ses facteurs est nul :
   3 est l'unique solution de ce système.
   Remarque : Il n'est pas toujours possible de factoriser un polynome du second degré en classe de seconde.
   - La deuxième méthode est un "tatônnement" vérifiant l'image des nombres proposés comme antécédents :
     - $f(3) = 3^2 - 6\times 3 + 2 = -7$
     - $f(2) = 2^2 - 6\times 2 + 2 = 0$
     - $f(1) = 1^2 - 6\times 1 + 2 = -3$
     - $f(-2) = (-2)^2 - 6\times(-2) + 2 = -6$

   Le seul antécédent de -7 est 3.

3. Graphiquement, l'ensemble de définition de la fonction g qui est : $\left]-4\,;7\right]$

4. Le point $(0\,;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_g$.
Ainsi, l'image de 0 par g est le nombre 1.

5. Les points $(-3\,;-1)$ et $(6\,;2)$ appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_g$.
On remarque que :
   - le point $(-2\,;-0{,}5)$ n'appartient à la courbe $\mathscr{C}_g$.
   - le point $(-4\,;1)$ n'appartient pas à la courbe car le nombre -4 n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction g.

Correction 2

1.
   - $f(2) = 2^2 - 2 + 2 = 4 - 2 + 2 = 4$
   - $g(2) = \dfrac{2\times 2 - 1}{3-2} = \dfrac{4-1}{1} = 3$
   - $h(2) = \sqrt{20 - 3\times 2^2} = \sqrt{20 - 3\times 4} = \sqrt{20-12}$
   $= \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$

2.
   - Résolvons l'équation :
   $$j(x) = 3$$
   $$4 - 2\cdot x = 3$$
   $$-2\cdot x = 3 - 4$$
   $$-2\cdot x = -1$$
   $$x = \frac{-1}{-2}$$
   $$x = \frac{1}{2}$$
   La fonction j admet pour unique antécédent $\dfrac{1}{2}$.
   - Résolvons l'équation :
   $$k(x) = 3$$
   $$3\cdot x^2 = 3$$
   $$x^2 = \frac{3}{3}$$
   $$x^2 = 1$$
   $$x^2 - 1 = 0$$
   $$x^2 - 1^2 = 0$$
   $$(x+1)(x-1) = 0$$
   Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x + 1 = 0$	$x - 1 = 0$
$x = -1$	$x = 1$

   Les nombres -1 et 1 sont les antécédents du nombre 3 par la fonction k.
   - Résolvons l'équation :
   $$\ell(x) = 3$$
   $$\frac{2-x}{2\cdot x + 1} = 3$$
   D'après le produit en croix :
   $$\big(2-x\big)\times 1 = \big(2\cdot x + 1\big)\times 3$$
   $$2 - x = 6\cdot x + 3$$
   $$-x - 6\cdot x = 3 - 2$$
   $$-7\cdot x = 1$$
   $$x = \frac{1}{-7}$$
   $$x = -\frac{1}{7}$$
   Le nombre 3 admet pour antécédent par la fonction ℓ le nombre $-\dfrac{1}{7}$.

Correction 3

- Graphiquement, on lit que son coefficient directeur a pour valeur $-0{,}5$
Ainsi, (d_1) est la représentation soit de la fonction f, soit de la fonction ℓ.

  La droite (d_1) intercepte l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;2)$: son ordonnée à l'origine vaut 2.

  On en déduit que la droite (d_1) a pour équation :
  $y = -0{,}5\cdot x + 2$
- La droite (d_2) passe par le point de coordonnées $(0\,;3)$: on en déduit que son ordonnée à l'origine est 3.

  Ainsi, la droite (d_2) est la représentation soit de la fonction j, soit de la fonction ℓ.

Or, graphiquement, on voit que le coefficient directeur de la droite (d_2) est 1.

On en déduit que la droite (d_2) a pour équation :
$y = x + 3$.

- Graphiquement, on observe que le coefficient directeur de la droite (d_3) est $\dfrac{1}{3}$.

  Ainsi, la droite (d_3) est la représentation soit de la fonction g, soit de la fonction k.

  La droite (d_3) passe par le point de coordonnées $(-4\,;0)$; or, ces coordonnées sont vérifiées seulement par la fonction k.

  On en déduit que la droite (d_3) a pour équation :
  $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$.

Correction 4

Une droite est une représentation d'une fonction affine. Elle admet donc une équation réduite de la forme :
$y = a{\cdot}x + b$ où a et b sont des nombres réels.

La droite passant par les points A et B a un coefficient directeur égal à :
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-5}{5-1} = \frac{3}{4}$$

L'équation réduite de (Δ) est de la forme : $y = \dfrac{3}{4}{\cdot}x + b$

Le point A appartenant à la droite (Δ), les coordonnées du point A vérifient l'équation réduite de cette droite :
$$\begin{aligned}
y_A &= \frac{3}{4}{\cdot}x_A + b\\
5 &= \frac{3}{4}\times 1 + b\\
b &= 5 - \frac{3}{4}\\
b &= \frac{20}{4} - \frac{3}{4}\\
b &= \frac{17}{4}
\end{aligned}$$

La droite (Δ) a pour équation de droite :
$y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{17}{4}$

Correction 5

1. $(S) : \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$

   En multipliant la première ligne par 3 et la seconde ligne par 2, on obtient le système d'équation suivant équivalent :
   $$\begin{cases} 9x + 6y = 15 \\ 8x + 6y = 6 \end{cases}$$

   Par soustraction de la seconde ligne à la première, on obtient :
   $$\begin{aligned} 9x - 8x &= 15 - 6\\ x &= 9 \end{aligned}$$

   En utilisant la première du système (S), on obtient :
   $$\begin{aligned}
   3x + 2y &= 5\\
   3\times 9 + 2y &= 5\\
   27 + 2y &= 5\\
   2y &= -22\\
   y &= -11
   \end{aligned}$$

   La solution du système (S) est le couple $(9\,;-11)$

2. $(T) : \begin{cases} 3x + y = 16 \\ 8x - 5y = 12 \end{cases}$

   De la première ligne, on obtient l'écriture de y en fonction de x :
   $y = 16 - 3x$
   Et à partir de la seconde ligne, on a :
   $$\begin{aligned}
   8x - 5y &= 12\\
   8x - 5(16-3x) &= 12\\
   8x - 80 + 15x &= 12\\
   23x &= 92\\
   x &= \frac{92}{23} = 4
   \end{aligned}$$

   On en déduit la valeur du y :
   $y = 16 - 3x = 16 - 3\times 4 = 16 - 12 = 4$

   La solution du système est le couple $(4\,;4)$

Correction 6

a. $$\begin{aligned}
(3x-1)(2x+2) + 3(5-2x)(x+1) &= 0\\
(3x-1)\big[2(x+1)\big] + 3(5-2x)(x+1) &= 0\\
2(3x-1)(x+1) + 3(5-2x)(x+1) &= 0\\
(x+1)\big[2(3x-1) + 3(5-2x)\big] &= 0\\
(x+1)(6x - 2 + 15 - 6x) &= 0\\
(x+1)13 &= 0\\
13(x+1) &= 0
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est $\{-1\}$.

b. $$\begin{aligned}
3(5x+1)(2-3x) + (6x-4)(x-1) &= 0\\
3(5x+1)(2-3x) + \big[-2(2-3x)\big](x-1) &= 0\\
3(5x+1)(2-3x) - 2(2-3x)(x-1) &= 0\\
(2-3x)\big[3(5x+1) - 2(x-1)\big] &= 0\\
(2-3x)(15x + 3 - 2x + 2) &= 0\\
(2-3x)(13x+5) &= 0
\end{aligned}$$

Un produit est nul, si et seulement si, au moins un des facteurs est nul. On en déduit que l'ensemble des solutions est :
$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{5}{13}\,;\dfrac{2}{3}\right\}$

c. $$\begin{aligned}
(4x+6)(1-2x) &= 5(2x+3)^2\\
(4x+6)(1-2x) - 5(2x+3)^2 &= 0\\
\big[2(2x+3)\big](1-2x) - 5(2x+3)^2 &= 0\\
2(2x+3)(1-2x) - 5(2x+3)^2 &= 0\\
(2x+3)\big[2(1-2x) - 5(2x+3)\big] &= 0\\
(2x+3)(2 - 4x - 10x - 15) &= 0\\
(2x+3)(-14x - 13) &= 0
\end{aligned}$$

Un produit est nul, si et seulement si, au moins un des facteurs est nul. On en déduit que l'ensemble des solu-

tions est :
$\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\,;-\frac{13}{14}\right\}$

Correction 7

a. $\frac{x-4}{3}=x-2$

$3\times\left(\frac{x-4}{3}\right)=3\times(x-2)$

$x-4=3x-6$

$x-3x=-6+4$

$-2x=-2$

$x=\frac{-2}{-2}$

$x=1$

L'ensemble des solutions est $\{1\}$.

b. $4x^2-1=(2x+2)^2$

$4x^2-1=4x^2+8x+4$

$-1=8x+4$

$-8x=4+1$

$-8x=5$

$x=\frac{5}{-8}$

$x=-\frac{5}{8}$

L'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{5}{8}\right\}$.

c. $2x^2+x+1=x^2-x$

$2x^2+x+1-x^2+x=0$

$x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$

L'ensemble des solutions est $\{-1\}$.

d. $(x+1)(x-1)=3x(x+1)$

$(x+1)(x-1)-3x(x+1)=0$

$(x+1)\big[(x-1)-3x\big]=0$

$(x+1)(x-1-3x)=0$

$(x+1)(-2x-1)=0$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul ; on en déduit que l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\left\{-1\,;-\frac{1}{2}\right\}$.

Correction 8

1.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-x)(2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x+4$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-3)(-2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3.

x	$-\infty$		-5		-4		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x-8$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x+5}{-2x-8}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

4.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$-x-1$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\frac{(x-1)(4-x)}{-x-1}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Correction 9

1. a. • L'image de 0 par la fonction f vaut 2.
• L'image de 2 par la fonction f vaut 0.

b. • Les antécédents de -4 par la fonction f sont :
$-2\quad;\quad 3$

• Le nombre 4 n'admet pas d'antécédents par la fonction f.

c. La droite d'équation $-\frac{7}{4}$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées : $\left(-\frac{3}{2}\,;-\frac{7}{4}\right)\quad;\quad\left(\frac{5}{2}\,;-\frac{7}{4}\right)$

Les solutions de l'équation sont : $-\frac{3}{2}\quad;\quad\frac{5}{2}$

d. Graphiquement l'inéquation $f(x)<0$ a pour ensemble des solutions :
$\mathcal{S}=\big[-2\,;-1\big[\cup\big]2\,;3\big]$

2. a. Développons l'expression :
$(-x+2)(x+1)=-x^2-x+2x+2$
$=-x^2+x+2=f(x)$

b. Résolvons l'équation :
$f(x)=0$
$(-x+2)(x+1)=0$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$-x+2=0$	$x+1=0$
$-x=-2$	$x=-1$
$x=2$	

L'ensemble des solutions de cet équation est :
$\mathcal{S}=\{-1\,;2\}$

c. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-x+2)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=\big[-1\,;2\big]$

d. On a le développement :

$$f(x) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4} = -\left[x^2-2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{9}{4}$$
$$= -\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{9}{4} = -x^2+x-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$$
$$= -x^2+x+\frac{8}{4} = -x^2+x+2$$

Soit a et b deux nombres appartenant à l'intervalle $\left[-2\,;\frac{1}{2}\right]$ admettant la comparaison :

$$a < b < \frac{1}{2}$$
$$a-\frac{1}{2} < b-\frac{1}{2} < 0$$

La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$:

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 > \left(b-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 < -\left(b-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4} < -\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$
$$f(a) < f(b)$$

Deux nombres appartenant à l'intervalle $\left[-2\,;\frac{1}{2}\right]$ et leurs images sont comparés dans le même ordre : on en déduit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[-2\,;\frac{1}{2}\right]$.

Correction 10

1. a. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2\cdot a} = -\dfrac{3}{2\times 2} = -\dfrac{3}{4}$
- $f\left(-\dfrac{3}{4}\right) = 2\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2+3\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)+1 = 2\times\dfrac{9}{16}-\dfrac{9}{4}+1$
$= \dfrac{9}{8}-\dfrac{9}{4}+1 = \dfrac{9-18+8}{8} = -\dfrac{1}{8}$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on a le tableau de vqriation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		-2
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

b. La fonction f admet pour minimum $-\dfrac{1}{8}$ et il est atteint pour $x=-\dfrac{3}{4}$.

D'après le tableau de variation, la fonction f s'annule une fois sur chacun de ces intervalles $\left]-\infty\,;-\dfrac{3}{4}\right]$ et $\left[-\dfrac{3}{4}\,;+\infty\right[$

2. a. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2\cdot a} = -\dfrac{4}{2\times(-4)} = -\dfrac{4}{-8} = \dfrac{1}{2}$
- $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = -4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)-1 = -4\times\dfrac{1}{4}+2-1$
$= -1+2-1 = 0$

Le coefficient du terme du second degré étant négatif, on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2
Variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b. La fonction g admet pour maximum 0 et il est atteint pour $x=\dfrac{1}{2}$.

Le tableau de variation indique que la fonction g n'admet qu'un seul antécédent du nombre 0.

3. a. On a les deux valeurs suivantes :

- $-\dfrac{b}{2\cdot a} = -\dfrac{2}{2\times 4} = -\dfrac{1}{4}$
- $h\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 4\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2+2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)+1$
$= 4\times\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{2}+1 = \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+1 = \dfrac{1-2+4}{4} = \dfrac{3}{4}$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on a le tableau variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		2
Variation de h	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

b. La fonction h admet pour minimum $\dfrac{3}{4}$ et il est atteint pour $x=-\dfrac{1}{4}$: la fonction ne peut pas s'annuler.

Correction 11

1. Voici le tableau complété :

	Garçons	Filles	Total
Externe	90	123	213
Demi-pension	327	312	639
Total	417	435	852

2. On a les probabilités :

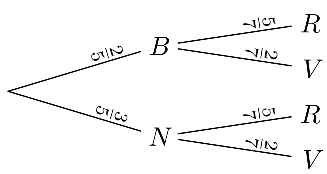
a. $\mathcal{P}\left(\overline{G}\cap E\right) = \dfrac{123}{852}$

b. $\mathcal{P}\left(G\cup\overline{E}\right) = \dfrac{729}{852}$

c. $\mathcal{P}\left(\overline{\left(G\cup\overline{G}\right)}\right) = 0$

Correction 12

1. Voici l'arbre de probabilité complété :



2. a. $\mathcal{P}(B\cap R) = \dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{7}$

b. $\mathcal{P}(B\cap V) = \dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{7} = \dfrac{4}{35}$

ⓒ $\mathcal{P}(N\cap R)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{7}=\dfrac{3}{7}$

3. ⓐ On a : $\mathcal{P}(B\cap R)+\mathcal{P}(N\cap R)=\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{7}=\dfrac{5}{7}$

ⓑ C'est la probabilité d'obtenir une boule rouge dans l'urne B.

Correction 13

1. La classe modale de cette série statistique est la classe $[12\,;16[$.

2. L'effectif total de cette série est de :
$5+32+61+80+15$

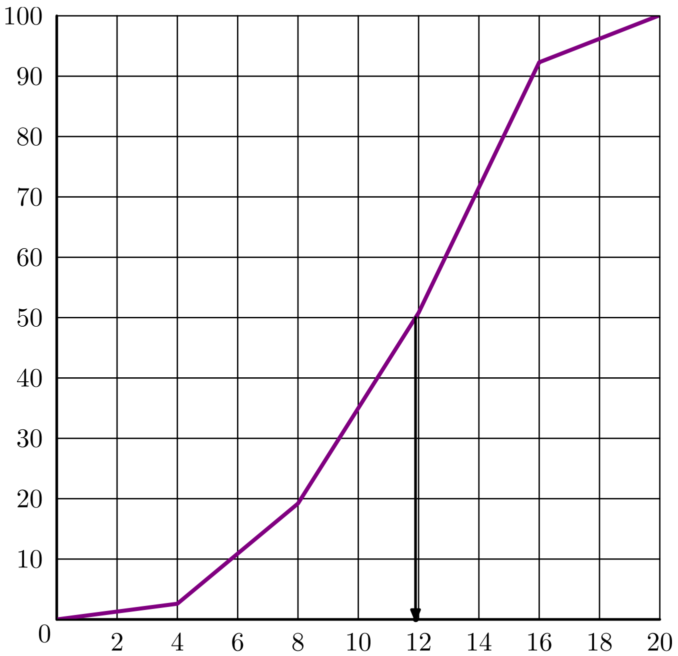
La moyenne de cette série statistique est de :

$$\overline{x}=\frac{2\times5+32\times6+10\times61+14\times80+18\times15}{193}$$
$$=\frac{2202}{193}\approx 11{,}41$$

3. ⓐ Voici le tableau complété :

Note	$[0\,;4[$	$[4\,;8[$	$[8\,;12[$	$[12\,;16[$	$[16\,;20[$
Effectif	5	32	61	80	15
Fréquence *en %*	2,6	16,6	31,6	41,5	7,8
Fréquence cumulée croissante	2,6	19,2	50,8	92,3	100,1

ⓑ Voici la courbe des fréquences cumulées croissantes :



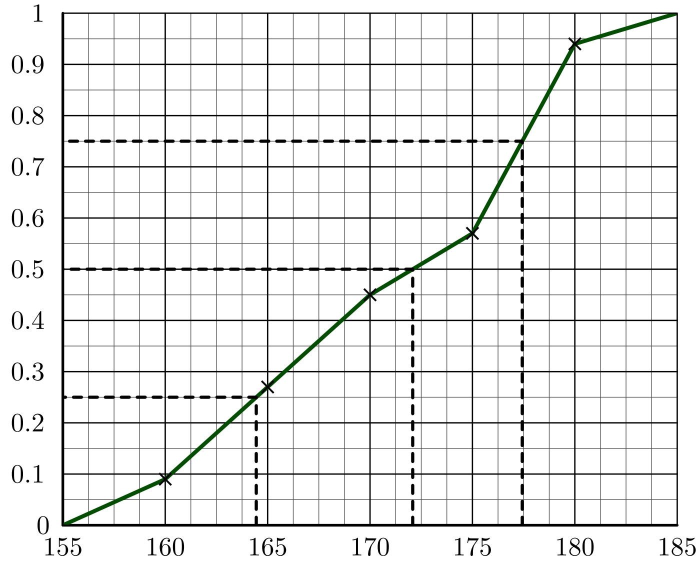
ⓒ Graphiquement, on en déduit que la médiane de la classe est d'environ de 12.

Correction 14

1. ⓐ Approximativement la fréquence associée à la classe $[155\,;160[$: 0,1

ⓑ Approximativement la fréquence associée à la classe $[175\,;180[$: $0{,}95-0{,}57=0{,}38$

2. Voici le graphique avec les traits de construction :



ⓐ La médiane de la série statistique a pour valeur 172

ⓑ Le premier quartile a pour valeur 164.
Le troisième quartile a pour valeur 177,5.

Correction 15

La correction n'existe pas pour l'exercice 3046