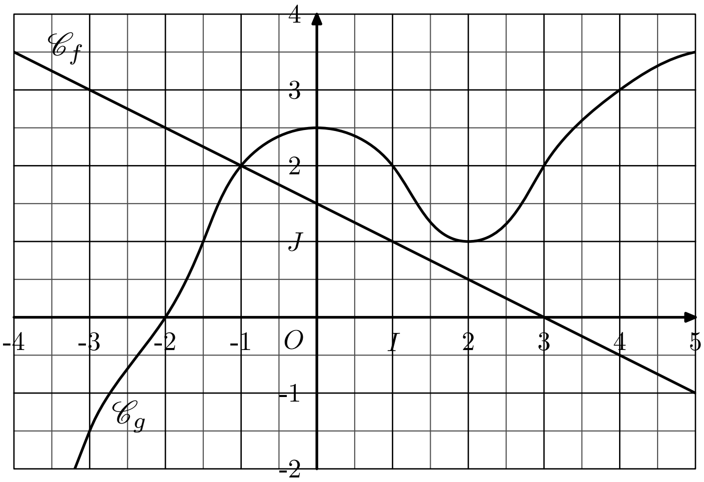
Fonctions

Exercice 1

On considère les deux fonctions f et g définies sur $[-4\,;5]$ dont les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives sont données dans le repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$:



1. a. Déterminer, par la fonction f, les images des nombres suivants :
$-3\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 3\ ;\ 5$

   b. Déterminer, par la fonction f, les antécédents des nombres suivants :
$3\ ;\ 2{,}5\ ;\ 0\ ;\ -1{,}5$

2. a. Déterminer, par la fonction g, les images des nombres suivants :
$-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ 3\ ;\ 4$

   b. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre $-1{,}5$ par la fonction g.

   c. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre 2 par la fonction g.

   d. Déterminer l'ensemble des antécédents du nombre 1 par la fonction g.

Correction 1

1. a. Graphiquement, on a les images suivantes :
$f(-3)=3\ ;\ f(-1)=2\ ;\ f(0)=1{,}5$
$f(3)=0\ ;\ f(5)=-1$

   b.
   - f admet un unique antécédent du nombre 3 qui est -3 :
$f(-3)=3$
   - Il existe un unique antécédent du nombre 2,5 par f :
$f(-2)=2{,}5$
-2 est l'unique antécédent par la fonction f du nombre 2,5.
   - L'unique antécédent du nombre 0 par la fonction f est 3 :
$f(3)=0$
   - La fonction f n'admet pas d'antécédent du nombre $-1{,}5$.

2. a. A l'aide de la fonction g, voici les images de quelques nombres :
$g(-3)=-1{,}5\ ;\ g(-2)=0\ ;\ g(-1)=2$
$g(1)=2\ ;\ g(3)=2\ ;\ g(4)=3$

   b. La fonction g admet un unique antécédent du nombre $-1{,}5$; ce nombre est -3 :
$g(-3)=-1{,}5$

   c. Le nombre 2 admet trois antécédent par la fonction g :
$-1\ ;\ 1\ ;\ 3$

   d. Le nombre 1 admet deux antécédents par la fonction g :
$g(-1{,}5)=1\ ;\ g(2)=1$

Exercice 2

1. On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$f(x)=3x-4$

   a. Calculer les images par f des nombres :
$-3\ ;\ -1\ ;\ 2{,}5\ ;\ 10$

   b. A l'aide d'une équation, déterminer les antécédents des nombres 5 et de -10 par la fonction f.

2. Soit g la fonction définie par : $g:x\longmapsto x^2+1$

   a. Calculer les nombres suivants :
$g(2)\ ;\ g(-5)\ ;\ g(-1)$.

   b. Déterminer par la fonction g les deux antécédents du nombres 5.

   c. Déterminer par la fonction g l'unique antécédent du nombres 1.

   d. Justifier que le nombre 0 n'admet aucun antécédent par la fonction g.

Correction 2

1. a. On a les images suivantes par la fonction f :
   - $f(-3)=3\times(-3)-4=-9-4=-13$
   - $f(-1)=3\times(-1)-4=-3-4=-7$
   - $f(2{,}5)=3\times2{,}5-4=3{,}5$
   - $f(10)=3\times10-4=26$

   b.
   - Les antécédents du nombre 5 par la fonction f sont les solutions de l'équation :
$3x-4=5$
$3x=9$
$x=3$
   - Les antécédents du nombre -10 par la fonction f sont les solutions de l'équation :
$3x-4=-10$
$3x=-6$
$x=-2$

2. a. On a les images suivantes :
   - $g(2)=2^2+1=4+1=5$
   - $g(-5)=(-5)^2+1=25+1=26$
   - $g(-1)=(-1)^2+1=1+1=2$

   b. Les antécédents de 5 sont solutions de l'équation :
$g(x)=5$
$x^2+1=5$
$x^2=4$
Les deux antécédents de 5 sont -2 et 2.

c. Les antécedents de 1 sont solutions de l'équation :

$$g(x) = 1$$
$$x^2 + 1 = 1$$
$$x = 0$$

0 est l'unique antécédent de 1 par la fonction g.

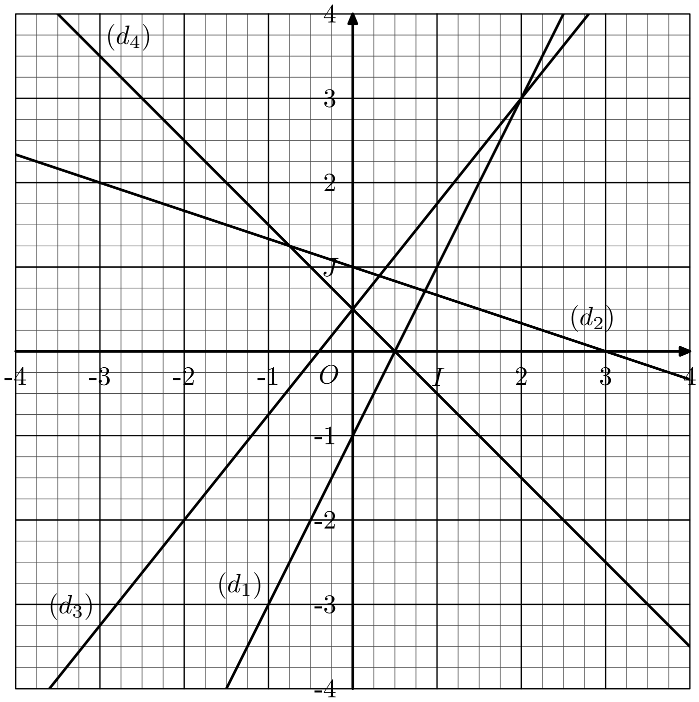
d. Les antécédents de 0 sont solutions de l'équation :

$$g(x) = 0$$
$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$

0 n'admet pas d'antécédent par la fonction g.

Exercice 3

Déterminer les coefficients directeurs de chacune des trois droites représentées ci-dessous dans le repère $(O\,;I\,;J)$:



Correction 3

- La droite (d_1) passe par les points de coordonnées :
  $A(-1\,;-3)$; $B(0\,;-1)$

  La droite (d_1) admet pour coefficient directeur :
  $$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-(-3)}{0-(-1)} = \frac{2}{1} = 2$$

- La droite (d_2) passe par les points de coordonnées :
  $A(0\,;1)$; $B(3\,;0)$

  La droite (d_2) admet pour coefficient directeur :
  $$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-1}{3-0} = -\frac{1}{3}$$

- La droite (d_3) passe par les points de coordonnées :
  $A(-2\,;-2)$; $B(2\,;3)$

  La droite (d_3) admet pour coefficient directeur :
  $$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-2)}{2-(-2)} = \frac{3+2}{2+2} = \frac{5}{4}$$

- La droite (d_4) passe par les points de coordonnées :
  $A\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$; $B\left(2\,;-\frac{3}{2}\right)$

  La droite (d_4) admet pour coefficient directeur :
  $$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1$$