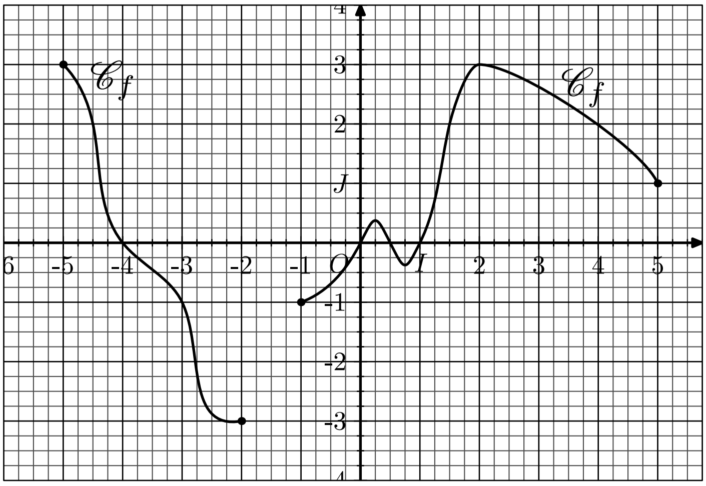
Généralités Fonctions

Exercice 1

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f :



1. a. Déterminer graphiquement les images par la fonction f des nombres ci-dessous :
   $-2 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad -4$

   b. Justifier qu'il n'est pas possible de déterminer les images des nombres suivants par la fonction f :
   $-1{,}5 \quad ; \quad 5{,}5$

2. Déterminer l'ensemble des antécédents par la fonction f associés à chacun des nombres suivants :

   a. 2   b. 3   c. $-3{,}5$

Correction 1

1. a. • La droite, parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x=-2$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnée $(-2; -3)$:
   "L'image de -2 par la fonction f est le nombre -3"

   • La droite d'équation $x=2$ intercepte la courbe représentative de la fonction f au point de coordonnée $(2; 3)$; on en déduit la valeur de l'image de 2 par la fonction f :
   $f : 2 \longmapsto 3$

   • Le seul point de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse -4 a pour coordonnée $(-4; 0)$; on en déduit la valeur de l'image de -4 par f :
   $f(-4) = 0$

   b. • On ne peut calculer l'image du nombre $-1{,}5$ car la droite, parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x=-1{,}5$ n'intercepte pas la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.

   • De même, la droite d'équation $x=5{,}5$ n'intercepte pas la courbe $\mathscr{C}_f$: le nombre 5,5 n'a pas d'image par la fonction f.

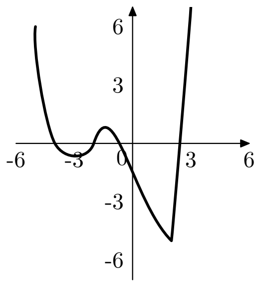
2. a. La droite, parallèle à l'axe des abscisses, d'équation $y=2$ intercepte en trois points la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f ; ces trois points ont pour abscisse respective :
   $-4{,}5 \quad ; \quad 1{,}5 \quad ; \quad 4$
   L'ensemble des antécédents du nombre 2 par la fonction f est l'ensemble
   $\left\{-4{,}5; 1{,}5; 4\right\}$

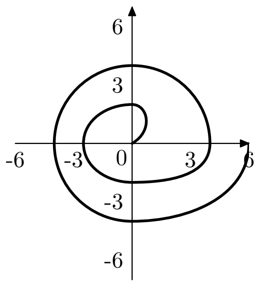
   b. La droite d'équation $y=3$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ aux deux points de coordonnée $(-5; 3)$ et $(2; 3)$.
   L'ensemble des antécédents du nombre 3 par la fonction f est $\{-5; 2\}$.

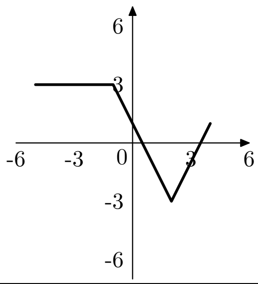
   c. La droite d'équatino $y=-3{,}5$ n'intercepte pas la courbe $\mathscr{C}_f$. Il n'y a pas d'antécédent au nombre $-3{,}5$ par la fonction f.

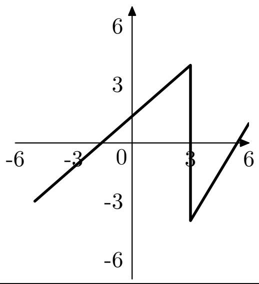
Exercice 2

Parmi les courbes représentées ci-dessous, deux courbes ne peuvent être la représentation d'une fonction. Lesquelles ?

a.


b.


c.


d.


Correction 2

Une fonction associe à un nombre de son ensemble de définition **une et eune seule image**. Ainsi pour toute courbe représentative d'une fonction, deux points ne peuvent avoir la même abscisse.

Ainsi, les courbes représentées à la question b. et d. ne peuvent être des courbes représentatives de fonctions.

Exercice 3

1. On considère les trois fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 - x + 2 \quad ; \quad g(x) = \frac{2{\cdot}x - 1}{3 - x} \quad ; \quad h(x) = \sqrt{20 - 3{\cdot}x^2}$$

Déterminer l'image du nombre 2 par chacune de ces trois fonctions.

2. On considère les trois fonctions suivantes :

$$j(x) = 4 - 2{\cdot}x \quad ; \quad k(x) = 3{\cdot}x^2 \quad ; \quad \ell(x) = \frac{2 - x}{2{\cdot}x + 1}$$

Déterminer les antécdents du nombre 3 par chacune de ces trois fontions.

Correction 3

1.
- $f(2) = 2^2 - 2 + 2 = 4 - 2 + 2 = 2$
- $g(2) = \dfrac{2{\times}2 - 1}{3 - 2} = \dfrac{4 - 1}{1} = 3$
- $h(2) = \sqrt{20 - 3{\times}2^2} = \sqrt{20 - 3{\times}4} = \sqrt{20 - 12}$
  $= \sqrt{8} = \sqrt{4{\times}2} = 2\sqrt{2}$

2.
- Résolvons l'équation :

$$\begin{aligned} j(x) &= 3 \\ 4 - 2{\cdot}x &= 3 \\ -2{\cdot}x &= 3 - 4 \\ -2{\cdot}x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{-2} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La fonction j admet un unique antécédent du nombre $\dfrac{1}{2}$.

- Résolvons l'équation :

$$\begin{aligned} k(x) &= 3 \\ 3{\cdot}x^2 &= 3 \\ x^2 &= \frac{3}{3} \\ x^2 &= 1 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 - 1^2 &= 0 \\ (x+1)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{r|r} x + 1 = 0 & x - 1 = 0 \\ x = -1 & x = 1 \end{array}$$

Les nombres -1 et 1 sont les antécédents du nombre 3 par la fonction k.

- Résolvons l'équation :

$$\begin{aligned} \ell(x) &= 3 \\ \frac{2 - x}{2{\cdot}x + 1} &= 3 \end{aligned}$$

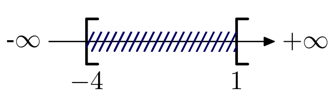
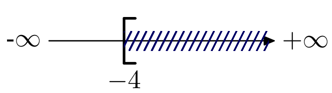
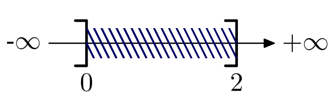
D'après le produit en croix :

$$\begin{aligned} \big(2 - x\big){\times}1 &= \big(2{\cdot}x + 1\big){\times}3 \\ 2 - x &= 6{\cdot}x + 3 \\ -x - 6{\cdot}x &= 3 - 2 \\ -7{\cdot}x &= 1 \\ x &= \frac{1}{-7} \\ x &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

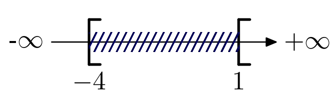
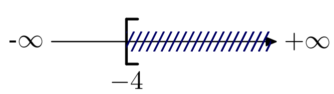
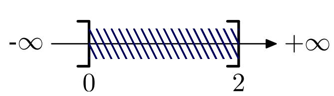
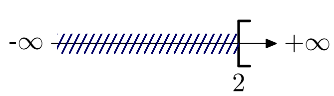
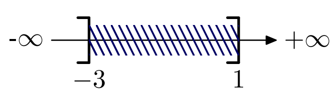
Le nombre 3 admet pour antécédent par la fonction ℓ le nombre $-\dfrac{1}{7}$.

Exercice 4

Recopier les informations manquantes sur votre copie :

<table>
<tr><td></td><td></td><td>$-4 \leqslant x < 1$</td></tr>
<tr><td>a.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c.</td><td></td><td>$x < 2$</td></tr>
<tr><td>d.</td><td></td><td>$-3 < x \leqslant 1$</td></tr>
</table>

Correction 4

<table>
<tr><td></td><td></td><td>$-4 \leqslant x < 1$</td></tr>
<tr><td>a.</td><td></td><td>$x \geqslant -4$</td></tr>
<tr><td>b.</td><td></td><td>$\big]0\,;\,2\big]$</td></tr>
<tr><td>c.</td><td></td><td>$x < 2$</td></tr>
<tr><td>d.</td><td></td><td>$-3 < x \leqslant 1$</td></tr>
</table>

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto 2x + 5$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
3. $h : x \longmapsto \dfrac{1}{2x + 5}$
4. $j : x \longmapsto \dfrac{x + 1}{2x + 5}$
5. $k : x \longmapsto \sqrt{x}$
6. $\ell : x \longmapsto \sqrt{x^2}$
7. $m : x \longmapsto \sqrt{2x + 5}$
8. $n : x \longmapsto \sqrt{-x + 2}$

Correction 5

1. Aucune contrainte sur l'expression définissant l'image de x. On peut calculer l'image de n'importe quel nombre au travers de la fonction f.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

2. Une fraction n'est pas définie lorsque son dénominateur est nul ; autrement dit, la fonction g est définie sur l'ensemble des réels privés du nombre 0.
On en déduit que : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{0\}$

3. Le dénominateur $2x+5$ s'annule en $-\dfrac{5}{2}$

$\mathcal{D}_h = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$.

4. Le dénominateur de la fonction h est le même que la fonction j, ainsi :

$\mathcal{D}_h = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$.

5. La racine d'un nombre est définie si, et seulement si, l'expression se trouvant sous le radical a une valeur positive ou nul *(c'est à dire supérieur à 0)*.
Ainsi, la fonction k est définie sur l'ensemble $\left[0\,;+\infty\right[$

6. Puisque x^2 est toujours positif ou nul, on en déduit que ℓ est définie sur $\mathbb{R}$:

$\mathcal{D}_\ell = \mathbb{R}$

7. Cherchons les valeurs pour lesquelles la fonction m est définie ; cela signifie qu'on recherche l'ensemble des valeurs telles que :

$2x+5 \quad 0$

$2x \quad -5$

$x \quad -\dfrac{5}{2}$

L'ensemble de définition de m est $\left[-\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

8. Faisons la même étude pour la fonction n :

$-x+2 \geqslant 0$

$-x \geqslant -2$

$x \leqslant 2$

L'ensemble de définition de n est $\left]-\infty\,;2\right]$

Exercice 6

On considère la fonction f définie, pour tout réel strictement positif, par :

$f(x) = \dfrac{-x^2}{3} + \dfrac{2}{x}$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Donner, sous forme simplifiée, les images des nombres suivants par la fonction f :

a. -2 b. 1 c. $\sqrt{2}$

3. Justifier que le nombre 2 est un antécédent de $-\dfrac{1}{3}$ par la fonction f.

Correction 6

1. L'expression de f définit l'image du nombre x par la somme :

- du premier terme : un quotient dont le dénominateur ne s'annule pas ;
- du second terme : un quotient dont le dénominateur s'annule pour $x=0$.

On en déduit l'ensemble de définition de la fonction f :

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$

2. a. $f(-2) = \dfrac{-(-2)^2}{3} + \dfrac{2}{-2} = -\dfrac{4}{3} - 1 = -\dfrac{7}{3}$

b. $f(1) = \dfrac{-1^2}{3} + \dfrac{2}{1} = -\dfrac{1}{3} + 2 = \dfrac{5}{3}$

c. $f(\sqrt{2}) = \dfrac{-(\sqrt{2})^2}{3} + \dfrac{2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{2}{3} + \sqrt{2}$

3. Pour résoudre cette question, on aurait pû résoudre l'équation :

$f(x) = 0$

$\dfrac{-x^2}{3} + \dfrac{2}{x} = 0$

Or, la résolution de cette équation fait appel à des connaissances de première.

En fait, il faut traduire la phrase :

"*2 est un antécédent de* $-\dfrac{1}{3}$"

par :

"*2 a pour image* $-\dfrac{1}{3}$"

$f(2) = \dfrac{-2^2}{3} + \dfrac{2}{2} = -\dfrac{4}{3} + 1 = -\dfrac{1}{3}$

Exercice 7

On considère la fonction f dont l'expression est définie par la relation :

$f(x) = 2{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 2$

Parmi les points ci-dessous, quels sont ceux qui appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :

$A(1\,;2) \quad ; \quad B(4\,;22) \quad ; \quad C(-1\,;9) \quad ; \quad D(0\,;3)$

Justifier vos réponses

Correction 7

- L'image du nombre 1 par la fonction f a pour valeur :

  $f(1) = 2\times1^2 - 3\times1 + 2 = 2\times1 - 3 + 2$

  $= 2 - 3 + 2 = 1 \neq 2$

  L'image du nombre 1 n'étant pas le nombre 2, on en déduit que le point $A(1\,;2)$ n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}_f$.

- L'image du nombre 4 par la fonction f a pour valeur :

  $f(4) = 2\times4^2 - 3\times4 + 2 = 2\times16 - 12 + 2$

  $= 32 - 12 + 2 = 22$

  L'image du nombre 4 ayant pour valeur 22, on en déduit que le point $B(4\,;22)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

- L'image du nombre -1 par la fonction f a pour valeur :

  $f(-1) = 2\times(-1)^2 - 3\times(-1) + 2 = 2\times1 + 3 + 2$

  $= 2 + 3 + 2 = 7 \neq 9$

  L'image du nombre -1 n'étant pas le nombre 9, on en déduit que le point $C(-1\,;9)$ n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}_f$.

- L'image du nombre 0 par la fonction f a pour valeur :

  $f(0) = 2\times0^2 - 3\times0 + 2 = 2\times0 - 0 + 2$

  $= 0 - 0 + 2 = 2 \neq 3$

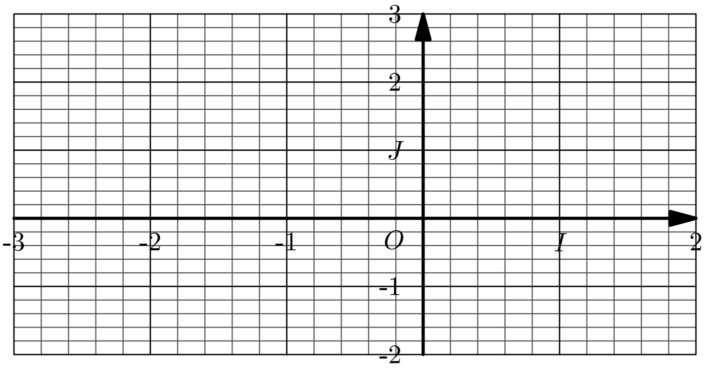
  L'image du nombre 0 n'étant pas le nombre 3, on en déduit que le point $D(0\,;3)$ n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est donnée par la relation :

$f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 1$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$ représenté ci-dessous :



On note $\mathscr{C}_f$ la représentation de la fonction f dans ce repère.

1. A l'aide de la calculatrice, compléter les tableaux de valeurs ci-dessous avec des valeurs arrondies au dixième :

x	$-2{,}3$	-2	$-1{,}8$	$-1{,}5$	$-1{,}2$	-1	$-0{,}8$
$f(x)$							

x	$-0{,}5$	0	$0{,}3$	$0{,}5$	$0{,}7$	1	$1{,}1$
$f(x)$							

2. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

3. Parmi les tableaux de variations ci-dessous lequel représente le mieux la courbe $\mathscr{C}_f$:

a.

x	$-\infty$		$0,5$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-1,8$	↗	$+\infty$

b.

x	$-\infty$		$-1,8$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$0,5$	↗	$+\infty$

c.

x	$-\infty$		$-1,7$		-1		$0,5$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$0,6$	↗	1	↘	$-1,8$	↗	$+\infty$

d.

x	$-\infty$		$0,6$		1		$-1,8$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-1,7$	↗	-1	↘	$0,5$	↗	$+\infty$

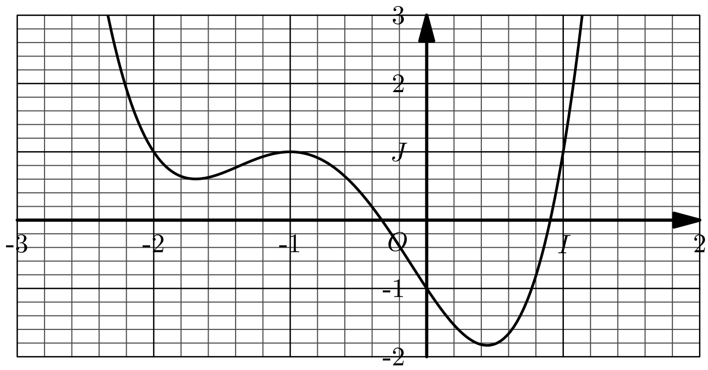
Correction 8

1. Voici les tableaux complétés :

x	$-2{,}3$	-2	$-1{,}8$	$-1{,}5$	$-1{,}2$	-1	$-0{,}8$
$f(x)$	2,7	1,4	0,6	0,7	0,9	1	0,9

x	$-0{,}5$	0	$0{,}3$	$0{,}5$	$0{,}7$	1	$1{,}1$
$f(x)$	0,4	-1	$-1{,}7$	$-1{,}8$	$-1{,}3$	1	2,4

2. Voici la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;2]$:



3. Le tableau de variation associé à la fonction f est le c. :

x	$-\infty$		$-1,7$		-1		$0,5$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$0,6$	↗	1	↘	$-1,8$	↗	$+\infty$

Exercice 9

Ci-dessous, sont représentés les tableaux de variations et les représentations graphiques de trois fonctions f, g, h.

Associer chaque tableau de variation à la représentation graphique correspondante :

a.

x	-4		-2		1		2
Variation de f	-1	↘	-3	↗	1	→	1

b.

x	-4		-2		1		2
Variation de f	0	↗	2	↘	1	↗	3

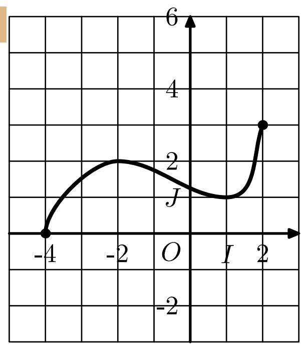
c.

x	-4		-2		0		2
Variation de f	3	↘	-2	↗	-1	↗	1

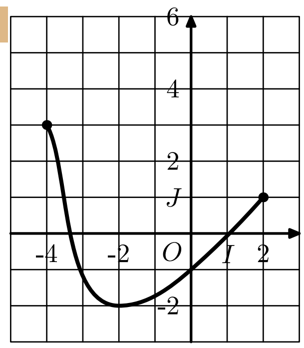
d.

x	-4		-1		0		2
Variation de f	3	↘	-2	↗	-1	↗	1

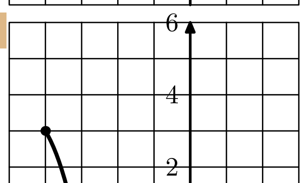
1.



2.



3.

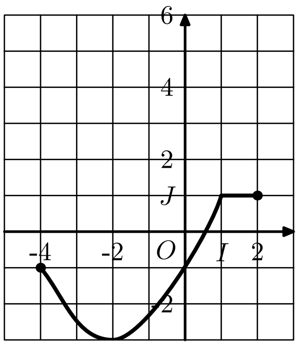


4.

Correction 9

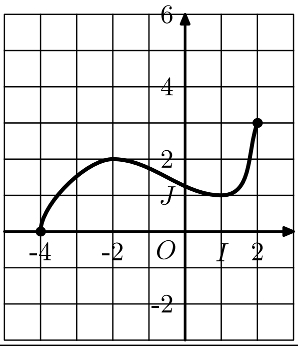
Voici les différentes associations des courbes représentatives et de leurs tableaux de variation :

- Pour la fonction f :



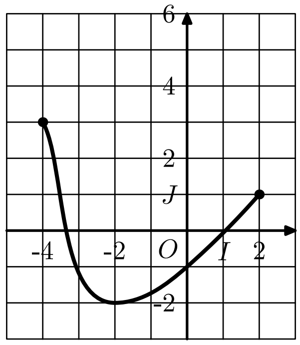
x	-4		-2		1		2
Variation de f	-1	↘	-3	↗	1	→	1

- Pour la fonction g :



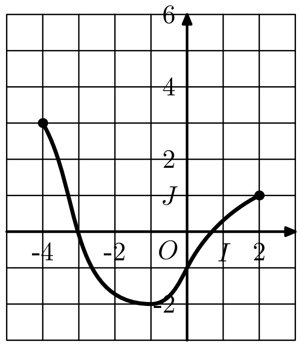
x	-4		-2		1		2
Variation de f	0	↗	2	↘	1	↗	3

- Pour la fonction h :



x	-4		-2		0		2
Variation de f	3	↘	-2	↗	-1	↗	1

- Pour la fonction j :



x	-4		-1		0		2
Variation de f	3	↘	-2	↗	-1	↗	1

Exercice 10

On considère la fonction f dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-5		$-\frac{9}{2}$		-1		0		3		6		$\sqrt{50}$
Variation de f	5	↘	-2	↗	2	↗	6	↘	3	↘	-5	↗	-3	↗	0

Réaliser, si possible, la comparaison des images des nombres suivants :

a. -5 et 3 b. 6 et -4 c. -6 et 4 d. $-4{,}75$ et 7

e. -3 et -2 f. 1 et 2 g. -10 et -3 h. 7 et -2

Correction 10

a. $f(-5) > f(3)$

b. $f(6) < f(-4)$

c. $f(-6) > f(4)$

d. $f(-4{,}75) \in \big[-2\,;2\big]$ et $f(7) \in \big[-3\,;0\big]$.
On ne peut conclure.

e. f est croissante sur $\left[-\dfrac{9}{2}\,;-1\right]$:
$f(-3) < f(-2)$

f. f est décroissante sur $[0\,;\,3]$:
$f(1) > f(3)$

g. $f(-10) \in \big[-2\,;5\big[$ et $f(-3) \in \Big[2\,;6\Big]$.
On ne peut conclure.

h. $f(7) < f(-2)$.

Exercice 11

On considère la fonction f dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-5		-3		-1		0		2		5		7		9
Variation de f	-2	↗	0	↗	4	↘	1	↗	2	↗	5	↘	0	↘	-3

1. Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction f :

a. $[-5\,;-3]$ b. $[-1\,;0]$ c. $[2\,;9]$

2. Comparer, si possible, les couples de nombres suivants :

a. $f(-4)$; $f(-2)$ b. $f(6)$; $f(8)$

c. $f(1)$; $f(8)$ d. $f(3)$; $f(4)$

e. $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ f. $f(-2)$; $f(3)$

3. a. Donner l'ensemble des solutions des deux inéquations :
   - $f(x) < 0$
   - $f(x) \geqslant 0$

   b. Dresser le tableau de signe de la fonction f.

4. Sans justification, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$.

Correction 11

1. On a les images d'intervalles suivantes :

   a. $f\Big([-5\,;-3]\Big)=[-2\,;0]$

   b. $f\Big([-1\,;0]\Big)=[1\,;4]$

   c. $f\Big([2\,;9]\Big)=[-3\,;5]$

2. Voici les comparaisons :

   a. $f(-4)<f(-2)$: car la fonction f est croissante sur l'intervalle $[-5\,;-1]$.
   On pouvait également justifier par :
   $f(-4)\in[-5\,;-3]$; $f(-3)\in f(-1)$

   b. $f(6)>f(8)$: car la fonction f est décroissante sur $[5\,;\,9]$.
   On pouvait également justifier :
   $f(6)\in[0\,;5]$; $f(8)\in[-3\,;0]$

   c. $f(1)>f(8)$ car : $f(1)\in[1\,;2]$; $f(8)\in[-3\,;0]$

   d. $f(3)<f(4)$ car la fonction f est croissante sur l'intervalle $[3\,;4]$.

   e. $f\Big(-\dfrac{2}{3}\Big)>f\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)$ car la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-1\,;0]$ et :
   $-\dfrac{2}{3}<-\dfrac{1}{2}$

   f. On ne peut comparer les deux images $f(-2)$ et $f(3)$ car les seules informations connues sont :
   $f(-2)\in[0\,;4]$; $f(3)\in[2\,;5]$

3. a.
   - L'équation $f(x)<0$ a pour solution :
     $\mathcal{S}=[-5\,;-3[\cup]7\,;9]$
   - L'équation $f(x)\geqslant 0$ a pour solution :
     $\mathcal{S}=[-3\,;7]$

   b. On a le tableau :

x	-5		-3		7		9
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. L'équation $f(x)=4$ admet trois solutions : -1 est une solution et cette équation admet également une unique solution sur chacun des deux intervalles suivants :
   $[2\,;5]$; $[5\,;7]$

Exercice 12

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[-7\,;\sqrt{31}]$ dont seul le tableau de variation ci-dessous est donné :

x	-7	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	2	5	$\sqrt{31}$
Variation de f	7	3	0	-2	0	3	4	$\frac{10}{3}$

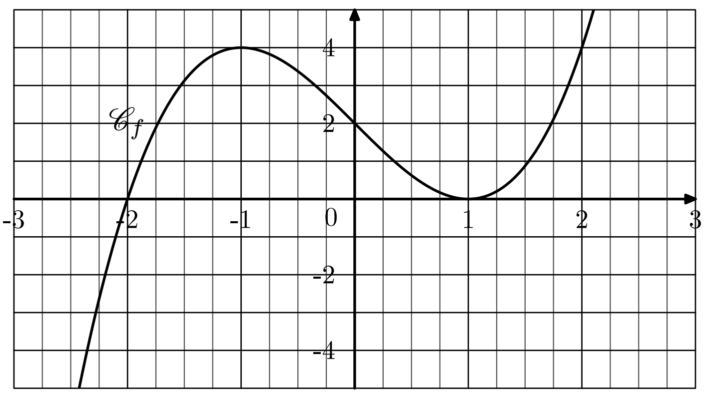
1. Donner, si possible, l'ensemble des antécédents du nombre 0 par la fonction f.
2. Résoudre l'inéquation : $f(x)\geqslant 3$.
3. Donner le maximum et le minimum de la fonction f ainsi que les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

Correction 12

1. Les antécédents de 0 par la fonction f sont $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2}{3}$.
2. On remarquera que $\dfrac{10}{3}>3$; ainsi, l'inéquation $f(x)\geqslant 3$ admet comme ensemble de solutions la réunion suivante d'intervalles :
   $S=[-7\,;-2]\cup[2\,;\sqrt{31}]$
3. Le maximum de la fonction f est 7 et il est atteint en -7
   Le minimum de la fonction f est -2 et il est atteint en 0.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x)=x^3-3x+2$



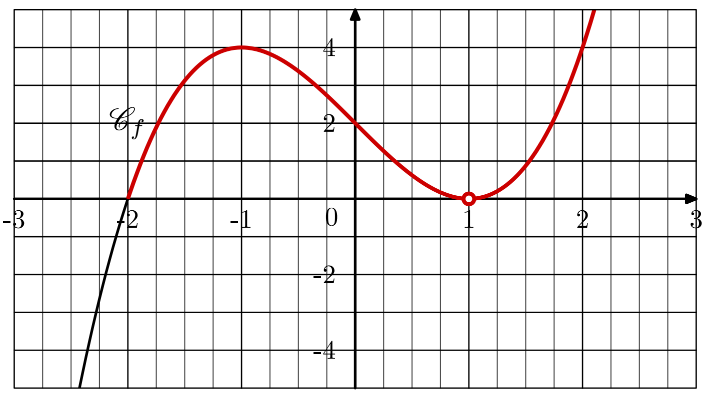
1. Graphiquement, déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>0$.
2. a. Etablir l'égalité suivante : $f(x)=(x+2)(x-1)^2$

   b. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation :
   $f(x)>0$

Correction 13

1. On a représenté ci-dessous la partie de la courbe ayant dont les points ont une ordonnée strictement positive :



Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)>0$ est :
$\mathcal{S}=]-2\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

2. a. On a les manipulations algébriques suivantes :
   $(x+2)(x-1)^2=(x+2)(x^2-2x+1)$
   $=x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2$
   $=x^3-3x+2=f(x)$

b. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

c. Le tableau de signe précédent vient confirmer les observations graphiques de la question 1., l'inéquation $f(x)>0$ a pour ensemble de solution :

$\mathcal{S} = \left]-2\,;1\right[\cup \left]1\,;+\infty\right[$