Géométrie

Exercice 1

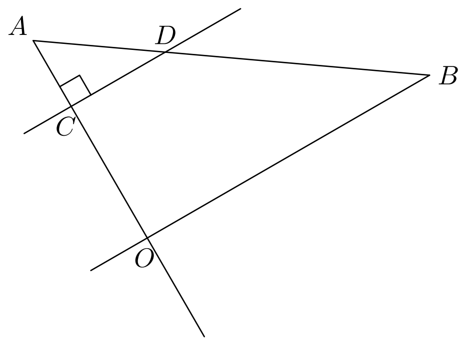
On considère la figure ci-dessous qui n'est pas dessinée en vrai grandeur.
L'unité de longueur est le centimètre.
Les droites (CD) et (OA) sont perpendiculaires.
On donne :

$OA = 9$; $OB = 12$; $AB = 15$; $AC = 3$

1. Démontrer que le triangle AOB est rectangle et en déduire que les droites (CD) et (OB) sont parallèles.

2. En justifiant le raisonnement, démontrer que : $CD = 4$.

3. Un élève affirme que l'aire du triangle AOB est égale à trois fois l'aire du triangle ACD.
Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier votre réponse.



Correction 1

1. Voici les deux chainons déductifs permettant de répondre à cette question :

   - On remarque qu'on a :
     - ➩ $AB^2 = 15^2 = 225$
     - ➩ $AO^2 + OB^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$

     Donc, on a : $AB^2 = AO^2 + OB^2$
     Si un triangle vérifie l'égalité de Pythagore, alors ce triangle est rectangle.
     On en déduit que le triangle AOB est rectangle en O.
   - $(CD) \perp (AO)$ et $(OB) \perp (AO)$.
     Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
     Ainsi, on a : $(CD) /\!/ (OB)$.

2. Les points A, C, O et les points A, D, B sont alignés.
Les droites (CD) et (OB) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des rapports suivante :
$$\frac{AC}{AO} = \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{OB}$$
Utilisons l'égalité :
$$\frac{AC}{AO} = \frac{CD}{OB}$$
Par application numérique, on obtient :
$$\frac{3}{9} = \frac{CD}{12}$$
D'après le produit en croix, on a :
$$9 \times CD = 3 \times 12$$
$$CD = \frac{36}{9}$$
$$CD = 4\,cm$$

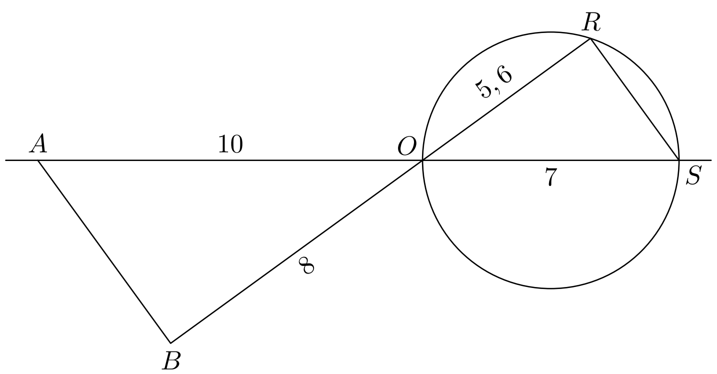
3. Ceci est faux car si on multiplie toutes les longueurs d'une figure par 3, son aire sera multiplié par 3^2.

   Pour preuve, calculons l'aire de ces deux triangles rectangles :

   - $\mathcal{A}_{ACD} = \dfrac{AC \times CD}{=} \dfrac{3 \times 4}{2} = 6\,cm^2$
   - $\mathcal{A}_{AOB} = \dfrac{AO \times OB}{2} = \dfrac{9 \times 12}{2} = 54\,cm^2$

Exercice 2

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur. Il n'est pas demandé de la reproduire.



$\mathscr{C}$ est un cercle de diamètre $[OS]$ tel que : $OS = 7\,cm$.
R est un point du cercle tel que : $OR = 5{,}6\,cm$.
A est le point de la demi-droite $[SO)$ tel que : $OA = 10\,cm$.
B est le point de la demi-droite $[RO)$ tel que : $OB = 8\,cm$.

1. Démontrer que les droites (AB) et (RS) sont parallèles.

2. Déterminer la nature du triangle ORS, puis celle du triangle AOB.

3. Déterminer la mesure des longueurs RS et AB par la méthode de votre choix.

Correction 2

1. Les points B, O, R et les points A, O, S sont alignés dans le même ordre.

   On a les valeurs suivantes des quotients :
$$\frac{OA}{OS} = \frac{10}{7} \quad ; \quad \frac{OB}{OR} = \frac{8}{5{,}6} = \frac{80}{56} = \frac{10}{7}$$
On en déduit l'égalité suivante des quotients :
$$\frac{OA}{OS} = \frac{OB}{OR}$$
D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (RS) et (AB) sont parallèles.

2. Le triangle ORS est inscrit dans un cercle dont le côté $[OS]$ est un diamètre.
Si un triangle est inscrit dans un cercle et si un de ses côtés forme un diamètre, alors ce triangle est rectangle et son côté est un diamètre.
Le triangle ORS est rectangle en R.

   On a les relations entre les droites :
$(AB) /\!/ (RS)$; $(BR) \perp (RS)$
Si deux droites sont parallèles entre elles et si une troisième est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.

On en déduit : $(AB)\perp(BR)$

Le triangle ABO est rectangle en O.

3. a. Le triangle rectangle ORS est rectangle en R.
D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

$$OS^2 = OR^2 + RS^2$$
$$7^2 = 5{,}6^2 + RS^2$$
$$49 = 31{,}36 + RS^2$$
$$RS^2 = 17{,}64$$
$$RS = 4{,}2\,cm$$

b. Les points B, O, R sont alignés.
Les points A, O, S sont alignés.

Les droites (AB) et (RS) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OA}{OS} = \frac{OB}{OR} = \frac{AB}{RS}$$

Par application numérique, on a :

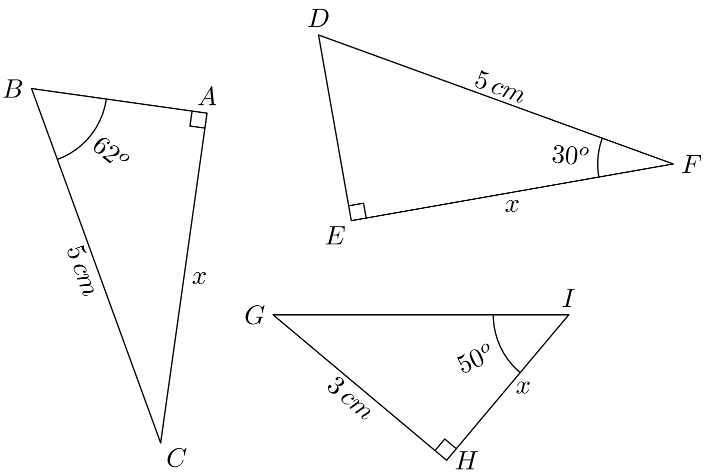
$$\frac{10}{7} = \frac{AB}{4{,}2}$$

D'après le produit en croix, on a :

$$10\times 4{,}2 = 7\times AB$$
$$AB = \frac{42}{7}$$
$$AB = 6\,cm$$

Exercice 3

Dans chaque cas, donner la longueur x du côté indiqué. On arrondiera le résultat au millimètre près :



Correction 3

- Le triangle ABC est triangle en A.
On a la relation trigonométrique :

$$\sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC}$$

Par application numérique :

$$\sin 62^o = \frac{AC}{5}$$

On en déduit :

$$AC = \sin 62^o\times 5 \simeq 4{,}4\,cm$$

- Le triangle DEF est rectangle en E.
On a la relation trigonométrique :

$$\cos\widehat{F} = \frac{EF}{DF}$$

Par application numérique :

$$\cos 30^o = \frac{EF}{5}$$

A l'aide d'un produit en croix, on a :

$$EF = \cos 30^o\times 5 \simeq 4{,}3\,cm$$

- Le triangle IGH est rectangle en H. On a la relation :

$$\tan\widehat{I} = \frac{GH}{IH}$$
$$\tan 50^o = \frac{2}{IH}$$

Le produit en croix donne :

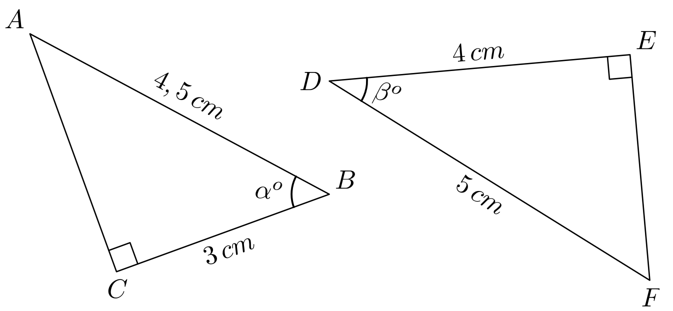
$$IH\times\tan 50^o = 2$$

On obtient la formule :

$$IH = \frac{2}{\tan 50^o} \simeq 1{,}7\,cm$$

Exercice 4

Calculer l'arrondi au dixième de degrés près des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EDF}$ indiqués ci-dessous :



Correction 4

- Dans le triangle ABC rectangle en C, on a la relation trigonométrique suivante :

$$\cos\widehat{CBA} = \frac{BC}{AB}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{3}{4{,}5}$$

La relation trigonométrique inverse donne :

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4{,}5}\right)$$
$$\alpha \simeq 48{,}2^o$$

- Dans le triangle DEF rectangle en E, on a la relation trigonométrique suivante :

$$\cos\widehat{FDE} = \frac{DE}{DF}$$
$$\cos(\beta) = \frac{4}{5}$$

La relation trigonométrique inverse donne :

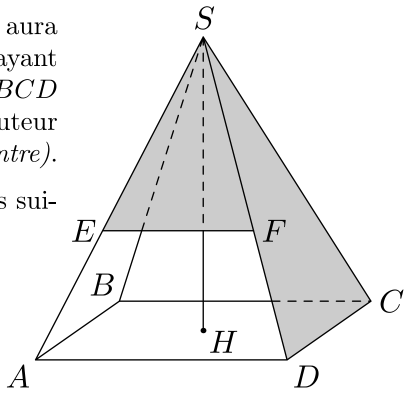
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$\beta \simeq 36{,}9^o$$

Exercice 5

On veut réaliser un tipi qui aura la forme d'une pyramide ayant pour base un rectangle $ABCD$ de centre H et pour hauteur $[SH]$ *(voir le schéma ci-contre)*.

Le tipi aura les dimensions suivantes :

$AD = 1{,}60\,m$
$CD = 1{,}20\,m$
$SH = 2{,}40\,m$



1. Calculer le volume V de cette pyramide, en m^3.

   On rappelle que $V = \dfrac{1}{3}\times B\times h$ où h désigne la hauteur et B l'aire de la base.

2. Calculer la longueur BD.

3. L'armature du tipi, constituée du cadre rectangulaire $ABCD$ et des quatre arêtes latérales issues de S, est faite de baguettes de bambou.

   Dans cette question, on n'attend pas de démonstration rédigée. Citer une propriété et présenter clairement un calcul suffit.

   a. Montrer que : $SD = 2{,}60\,m$

   b. On ajoute à l'armature une baguette $[EF]$ comme indiqué sur le dessin de sorte que $(EF)/\!\!/(AD)$ et $SF = 1{,}95\,m$.
   Calculer EF.

4. On a trouvé dans un magasin des tiges de bambou de $3\,m$. Une tige peut être coupée pour obtenir deux baguettes mais une baguette ne peut être fabriquée par collage de deux morceaux de bambou.

   Combien faut-il acheter de tiges de bambou, au minimum, pour réaliser les neuf baguettes de l'armature du tipi ?

Correction 5

1. La base $ABCD$ de la pyramide est un rectangle ayant pour aire :
   $\mathcal{A}_B = AD\times DC = 1{,}60\times 1{,}20 = 1{,}92\,cm^2$

   Ainsi, cette pyramide a pour volume :
   $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}_B\times h = \dfrac{1}{3}\times 1{,}92\times 2{,}40 = 1{,}536\,m^3$

2. La base $ABCD$ est un rectangle, ainsi le triangle BCD est un triangle rectangle en C.
   Dans le triangle BCD rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore, on a la relation :
   $BD^2 = BC^2 + CD^2$
   $BD^2 = 1{,}6^2 + 1{,}2^2$
   $BD^2 = 2{,}56 + 1{,}44$
   $BD^2 = 4$
   $BD = \sqrt{4}$
   $BD = 2\,cm$

3. a. La base $ABCD$ étant un rectangle, on en déduit que ses diagonales se coupent en leurs milieux. En particulier, le point H est le milieu du segment $[BD]$:
   $HD = \dfrac{1}{2}\times BD = \dfrac{1}{2}\times 2 = 1$
   $[SH]$ est la hauteur de la pyramide. Ainsi, les droites (SH) et (HD) sont perpendiculaires : le triangle SHD est un triangle rectangle en H.
   Dans le triangle SHD rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a la relation :
   $SD^2 = SH^2 + HD^2$
   $SD^2 = 2{,}4^2 + 1^2$
   $SD^2 = 5{,}76 + 1$
   $SD^2 = 6{,}76$
   $SD = \sqrt{6{,}76}$
   $SD = 2{,}6\,cm$

   b. Travaillons dans le plan contenant la face avant. On a :
   - Les points S, E, A et S, F, D sont alignés.
   - Les droites (AD) et (EF) sont parallèles.

   D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité des rapports suivants :
   $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{EF}{AD}$
   $\dfrac{SF}{SD} = \dfrac{EF}{AD}$
   Par application numérique, on a :
   $\dfrac{1{,}95}{2{,}6} = \dfrac{EF}{1{,}6}$
   D'après le produit en croix, on a :
   $2{,}6\times EF = 1{,}95\times 1{,}6$
   $EF = \dfrac{1{,}95\times 1{,}6}{2{,}6}$
   $EF = 1{,}2\,m$

4. Passant en revue les différences associant d'arêtes pour acheter le moins de tiges de bambou :
   - 4 baguettes permettront de constituer les arêtes $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ et $[SD]$.
   - 1 baguette permettra de constituer les deux arêtes $[AD]$ et $[CD]$.
   - 1 baguette permettra de constituer les deux arêtes $[AB]$ et $[BD]$.
   - il faudra encore une baguette pour constituer l'arête $[EF]$.

   On aura donc besoin de 7 tiges de bambou pour constituer ce tipi.