Second degré

Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = -6x^2 + 10x - 4$$

1. Etablir les égalités suivantes :
$$f(x) = 2(x-1)(2-3x) = -6\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}$$

2. Calculer l'image des nombres ci-dessous par la fonction f

a. 0 b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{5}{6}$

Correction 1

1. Montrons que chacune de ces formes est équivalente à une même expression développée réduite :

- $2(x-1)(2-3x) = (2x-2)(2-3x) = 4x - 6x^2 - 4 + 6x$
$= -6x^2 + 10x - 4 = f(x)$
- $f(x)$ $-6\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} = -6\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}\right) + \frac{1}{6}$
$= -6x^2 + 10x - \frac{25}{6} + \frac{1}{6} = -6x^2 + 10x - \frac{24}{6}$
$= -6x^2 + 10x - 4$

2. Chacun des nombres présentés est plus facile avec une des trois expressions définissant la fonction f :

a. $f(0) = -6\times0^2 + 10\times0 - 4 = 0 + 0 - 4 = -4$

b. $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3} - 1\right)\left(2 - 3\times\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3} - 1\right)\times0 = 0$

c. $f\left(\frac{5}{6}\right) = -6\left(\frac{5}{6} - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} = -6\times0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Exercice 2

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par :

$$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

1. a. Etablir l'égalité : $f(x) = (x+1)(2x-1)$

b. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

2. a. Etablir l'égalité : $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$.

b. Etablir l'inégalité ci-dessous pour tout nombre x réel :
$$f(x) \geqslant -\frac{9}{8}$$

c. La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum ?

Correction 2

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :
$(x+1)(2x-1) = 2x^2 - x + 2x - 1$
$= 2x^2 + x - 1 = f(x)$

b. Résolvons l'équation suivante :
$$f(x) = 0$$
$$(x+1)(2x-1) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. On obtient les deus équations suivantes :

$x + 1 = 0$	$2x - 1 = 0$
$x = -1$	$2x = 1$
	$x = \frac{1}{2}$

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = \left\{-1\,;\,\frac{1}{2}\right\}$.

2. a. On a les transformations suivantes :
$2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} = 2\left(x^2 + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{16}\right) - \frac{9}{8}$
$= 2\cdot x^2 + x + \frac{1}{8} - \frac{9}{8} = 2\cdot x^2 + x - \frac{8}{8}$
$= 2\cdot x^2 + x - 1 = f(x)$

b. Le carré d'un nombres est toujours positif :
$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \geqslant 0$$
$$2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \geqslant 0$$
$$2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} \geqslant -\frac{9}{8}$$
$$f(x) \geqslant -\frac{9}{8}$$

c. On a l'image suivante :
$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} = 2\times0 - \frac{9}{8} = -\frac{9}{8}$
On en déduit que la fonction f admet $-\frac{9}{8}$ comme minimum pour $x = -\frac{1}{4}$.

Exercice 3

Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

a. $2x^2 + 8x - 6$ b. $3x^2 + 3x + 6$
c. $9x^2 + 18x + 27$ d. $5x^2 + 10x + 2$
e. $2x^2 + 5x - 4$ f. $\sqrt{2}x^2 - 3x + 1$

Correction 3

a. $2x^2 + 8x - 6 = 2\cdot(x^2 + 4x - 3) = 2\cdot\left[(x+2)^2 - 4 - 3\right]$
$= 2\cdot\left[(x+2)^2 - 7\right]$

b. $3x^2 + 3x + 6 = 3\cdot(x^2 + x + 2) = 3\cdot\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2\right]$
$= 3\cdot\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right]$

c. $9x^2 + 18x + 27 = 9\cdot(x^2 + 2x + 3) = 9\cdot\left[(x+1)^2 - 1 + 3\right]$
$= 9\cdot\left[(x+1)^2 + 2\right]$

d. $5x^2 + 10x + 2 = 5\cdot\left(x^2 + 2x + \frac{2}{5}\right) = 5\cdot\left[(x+1)^2 - 1 + \frac{2}{5}\right]$
$= 5\cdot\left[(x+1)^2 - \frac{3}{5}\right]$

e. $2x^2+5x-4 = 2\cdot\Big(x^2+\dfrac{5}{2}-2\Big) = 2\cdot\Big[\Big(x+\dfrac{5}{4}\Big)^2-\dfrac{25}{16}-2\Big]$

$= 2\cdot\Big[\Big(x+\dfrac{5}{4}\Big)^2-\dfrac{57}{16}\Big]$

f. $\sqrt{2}x^2-3x+1 = \sqrt{2}\cdot\Big(x^2-\dfrac{3}{\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$

$= \sqrt{2}\cdot\Big(x^2-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)$

$= \sqrt{2}\cdot\Big[\Big(x-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\Big)^2-\dfrac{18}{16}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big]$

$= \sqrt{2}\cdot\Big[\Big(x-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\Big)^2-\dfrac{9}{8}+\dfrac{4\sqrt{2}}{8}\Big]$

$= \sqrt{2}\cdot\Big[\Big(x-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\Big)^2-\dfrac{9-4\sqrt{2}}{8}\Big]$

Exercice 4

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre réel x est définie par la relation :

$f(x) = 2x^2+4x-1$

1. Etablir l'égalité : $f(x)=2(x+1)^2-3$
2. Montrer que :
   a. f est strictement décroissante sur $\big]-\infty;-1\big]$.
   b. f est strictement croissante sur $\big[-1;+\infty\big[$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. En déduire que -3 est le minimum de la fonction f.

Correction 4

1. On a les transformation algébriques suivantes :

$2(x+1)^2-3 = 2(x^2+2x+1)-3$

$= 2x^2+4x+2-3 = 2x^2+4x-1 = f(x)$

2. a. Soit a et b deux nombres appartenant à $\big]-\infty\,;1\big]$ tels que $a<b$:

$a<b<-1$

$a+1<b+1<0$

Deux nombres négatifs et leurs carrés sont comparés dans le sens contraire :

$(a+1)^2 > (b+1)^2$

$2(a+1)^2 > (b+1)^2$

$2(a+1)^2-3 > (b+1)^2-3$

$f(a) > f(b)$

Deux nombres de $\big]-\infty\,;-1\big]$ et leurs images sont comparés dans le sens contraire : la fonction f est décroissante sur $\big]-\infty\,;-1\big]$.

b. Soit a et b deux nombres appartenant à $\big[1\,;+\infty\big[$ tels que $a<b$:

$-1<a<b$

$0<a+1<b+1$

Deux nombres positifs et leurs carrés sont comparés dans le même sens :

$(a+1)^2 < (b+1)^2$

$2(a+1)^2 < (b+1)^2$

$2(a+1)^2-3 < (b+1)^2-3$

$f(a) < f(b)$

Deux nombres de $\big[-1\,;+\infty\big[$ et leurs images sont comparés dans le même sens : la fonction f est croissante sur $\big[-1\,;-\infty\big[$.

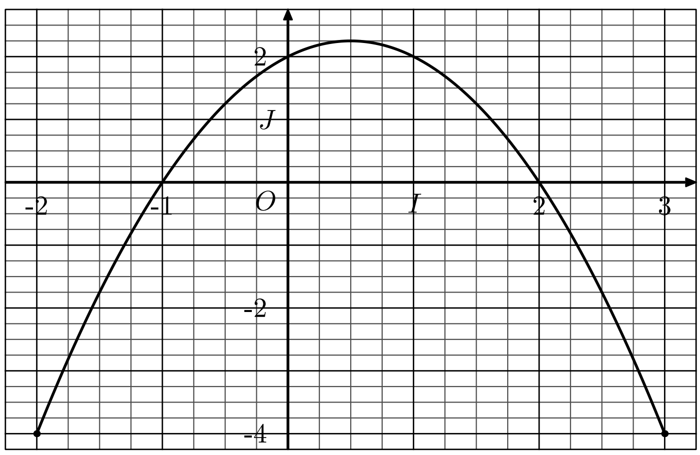
3. On a le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

4. Le tableau de variation indique que la fonction f admet -3 comme valeur minimale et qu'elle est atteinte pour $x=-1$.

Exercice 5

La courbe ci-contre est la représentation d'une fonction f définie sur $\big[-2\,;3\big]$.



1. Graphiquement, répondre aux questions suivantes :
   a. Quelles sont les images de 0 et 2 par f ?

b. Donner, si possible :

- les antécédents éventuels de -4 par f ;
- les antécédents éventuels de 4 par f ;

c. Quelles sont les solutions de l'équation : $f(x)=-\dfrac{7}{4}$?

d. Quelles sont les solutions de l'inéquation : $f(x)<0$?

2. On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et admet pour expression :
$f(x) = -x^2 + x + 2$.

a. Justifier que : $f(x)=(-x+2)(x+1)$

b. Résoudre l'équation : $f(x)=0$

c. A l'aide d'un tableau de signes, résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 0$.

d. Justifier que : $f(x)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$.

En déduire la croissance de f sur l'intervalle $\left[-2\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

Correction 5

1. a. - L'image de 0 par la fonction f vaut 2.
- L'image de 2 par la fonction f vaut 0.

b. - Les antécédents de -4 par la fonction f sont :
$-2\ ;\ 3$
- Le nombre 4 n'admet pas d'antécédents par la fonction f.

c. La droite d'équation $-\dfrac{7}{4}$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées : $\left(-\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{7}{4}\right)$; $\left(\dfrac{5}{2}\,;-\dfrac{7}{4}\right)$

Les solutions de l'équation sont : $-\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{5}{2}$

d. Graphiquement l'inéquation $f(x)<0$ a pour ensemble des solutions :
$\mathcal{S}=\big[-2\,;-1\big[\cup\big]2\,;3\big]$

2. a. Développons l'expression :
$$(-x+2)(x+1) = -x^2 - x + 2x + 2$$
$$= -x^2 + x + 2 = f(x)$$

b. Résolvons l'équation :
$$f(x) = 0$$
$$(-x+2)(x+1) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$-x+2=0 \qquad x+1=0$$
$$-x=-2 \qquad x=-1$$
$$x=2$$

L'ensemble des solutions de cet équation est :
$\mathcal{S}=\big\{-1\,;2\big\}$

c. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-x+2)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S}=\big[-1\,;2\big]$

d. On a le développement :
$$f(x) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4} = -\left[x^2-2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+\frac{9}{4}$$
$$= -\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{9}{4} = -x^2+x-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$$
$$= -x^2+x+\frac{8}{4} = -x^2+x+2$$

Soit a et b deux nombres appartenant à l'intervalle $\left[2\,;\dfrac{1}{2}\right]$ admettant la comparaison :
$$a<b<\frac{1}{2}$$
$$a-\frac{1}{2}<b-\frac{1}{2}<0$$

La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$:
$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 > \left(b-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 < -\left(b-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4} < -\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$
$$f(a) < f(b)$$

Ainsi, deux nombres appartenant à l'intervalle $\left[2\,;\dfrac{1}{2}\right]$ et leurs images sont comparés dans le même ordre : on en déduit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[2\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

