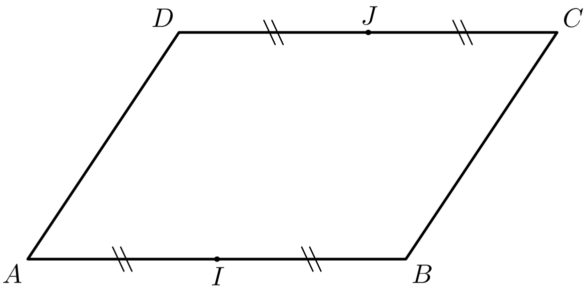
Vecteurs

Exercice 1

On considère le parallélogramme $ABCD$ représenté ci-dessous où les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.



Pour chaque question, donner sans justification un vecteur égal à l'expression proposée :

a. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{IB}$ b. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CJ}$ c. $2\cdot\overrightarrow{AJ}+2\cdot\overrightarrow{CB}$

Correction 1

a. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{AJ}$

b. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{0}$

c. $2\cdot\overrightarrow{AJ}+2\cdot\overrightarrow{CB}=2\cdot\left(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{CB}\right)=2\cdot\left(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JI}\right)$
$=2\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$

Exercice 2

1. Tracer un triangle ABC rectangle en B.
2. Placer le point T tel que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CT}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère $ABTC$?
3. Placer le point M tel que : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MT}$.
   Justifier que le quadrilatère $BCTM$ est un rectangle.

Correction 2

2. Puisque $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CT}$, le quadrilatère $ABTC$ est un parallélogramme.
3. Le point M étant placé tel que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MT}$, on en déduit que le quadrilatère $BCTM$ est un parallélogramme.

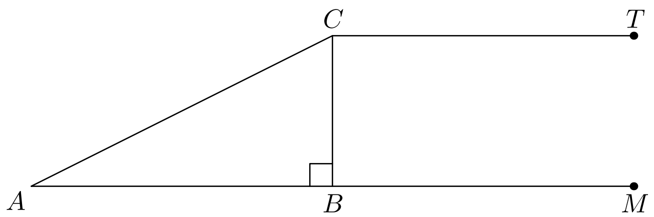
   D'après la question précédente, $ABTC$ est un parallélogramme.
   Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles entre eux.

   On en déduit : $(AB)/\!/(CT)$

   Le triangle ABC étant rectangle en B : $(AB)\perp(BC)$.

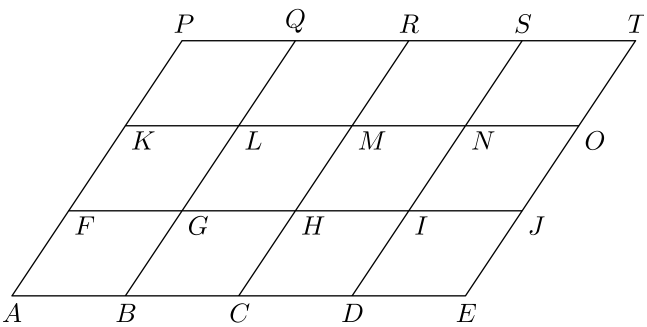
   On a : $(AB)/\!/(CT)$; $(AB)\perp(BC)$.
   Si deux droites sont parallèles entre elles et si une troisième est parallèle à l'une d'elle alors elle est parallèle à l'autre.
   On en déduit : $(CT)\perp(BC)$.

   On en déduit que l'angle $\widehat{BCT}$ est un angle droit.
   Si un parallélogramme possède un angle droit alors c'est un rectangle.
   $BCTM$ est un rectangle.



Exercice 3

On considère le dessin ci-dessous :



Recopier et compléter convenablement les pointillés :

a. $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{K\ldots}$ b. $\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{\ldots P}$

c. $\overrightarrow{UM}+\overrightarrow{\ldots}=\overrightarrow{0}$ d. $\overrightarrow{FL}+\overrightarrow{\ldots I}=\overrightarrow{FN}$

Correction 3

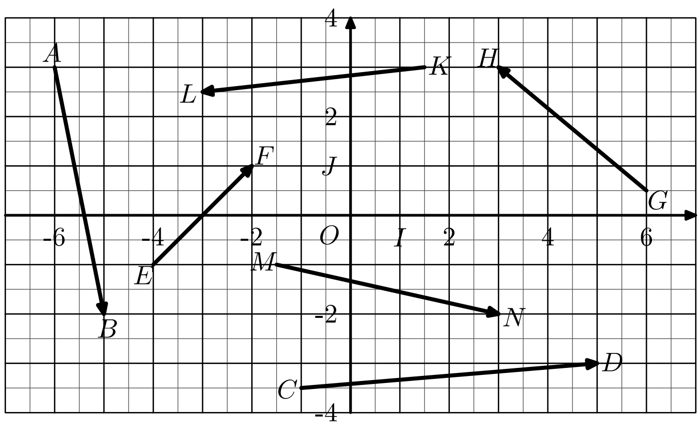
a. $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KM}$

b. $\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{MP}$

c. $\overrightarrow{UM}+\overrightarrow{MU}=\overrightarrow{0}$

d. $\overrightarrow{FL}+\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{FN}$

Exercice 4



1. Graphiquement, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$.

2. a. Donner les coordonnées des points G, H, K, L, M et N.

   b. En déduire, par le calcul, les coordonnées des vecteur $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{MN}$.

Correction 4

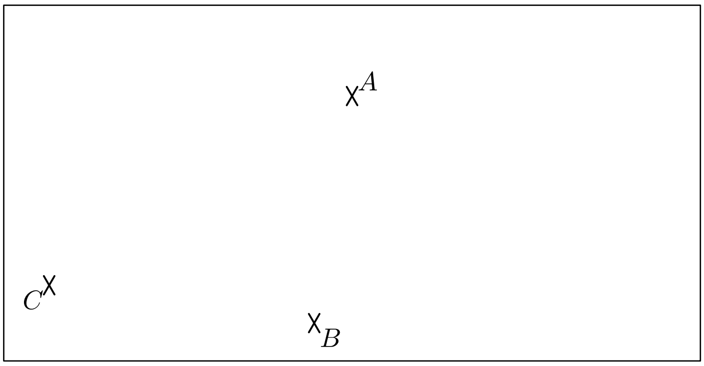
1. On a les coordonnées des vecteurs :
   $\overrightarrow{AB}(1\,;-5)$; $\overrightarrow{CD}(6\,;0{,}5)$; $\overrightarrow{EF}(2\,;2)$

2. a. Voici les coordonnées des points :
   $G(6\,;0{,}5)$; $H(3\,;3)$; $K(1{,}5\,;3)$
   $L(-3\,;2{,}5)$; $M(-1{,}5\,;-1)$; $N(3\,;-2)$

   b. On a les coordonnées de vecteurs :
   - $\overrightarrow{GH}(x_H - x_G\,;y_H - y_G)$
     $= (3-6\,;3-0{,}5)(-3\,;2{,}5)$
   - $\overrightarrow{KL}(x_L - x_K\,;y_L - y_K)$
     $= (-3-1{,}5\,;2{,}5-3) = (-4{,}5\,;-0{,}5)$
   - $\overrightarrow{MN}(x_N - x_M\,;y_N - y_M)$
     $= (3-(-1{,}5)\,;-2-(-1)) = (4{,}5\,;-1)$

Exercice 5

A, B et C sont trois points du plan. Reproduiser une figure analogue à celle ci-dessous et compléter-la avec les questions suivantes :



1. Construire le point M image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

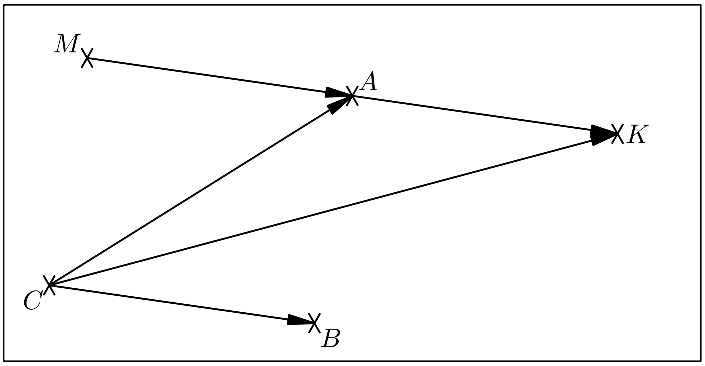
2. Donner un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{MA}$.

3. Construire K tel que : $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CK}$

4. Justifier l'égalité : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AK}$.

5. Démontrer que : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AK}$.
   Que peut-on dire pour le point A ?

Correction 5



2. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CB}$.

4. Le point K a été construit à partir de la relation :
$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{CK} - \left(\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KA}\right) = \overrightarrow{CB}$$
$$-\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB}$$

5. D'après la question 2. et 3., on a les égalités :
   $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AK}$

   On en déduit l'égalité suivante : $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AK}$.

   On en déduit que le point A est le milieu du segment $[MK]$.

Exercice 6

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormal.

1. On considère les points :
   $A(5\,;3)$; $B(17\,;6)$; $C(-3\,;1)$

   Montrer que les points A, B et C sont alignés.

2. On considère les points :
   $D(5\,;-2)$; $E(-3\,;10)$; $F(-3\,;-2)$; $G(3\,;-11)$

   Montrer que les droites (DE) et (FG) sont parallèles.

Correction 6

1. On a les coordonnées de vecteurs suivants :
   - $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$
     $= (17-5\,;6-3) = (12\,;3)$
   - $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,;y_C - y_A)$
     $= (-3-5\,;1-3) = (-8\,;-2)$

   En remarquant l'égalité : $\overrightarrow{AB} = -\dfrac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$.

   On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

   Ainsi, les deux droites (AB) et (AC) sont parallèles et possèdent A comme point commun : on en déduit que ces deux droites sont confondues.
   Les points A, B, C appartenant à une même droite : ils sont alignés.

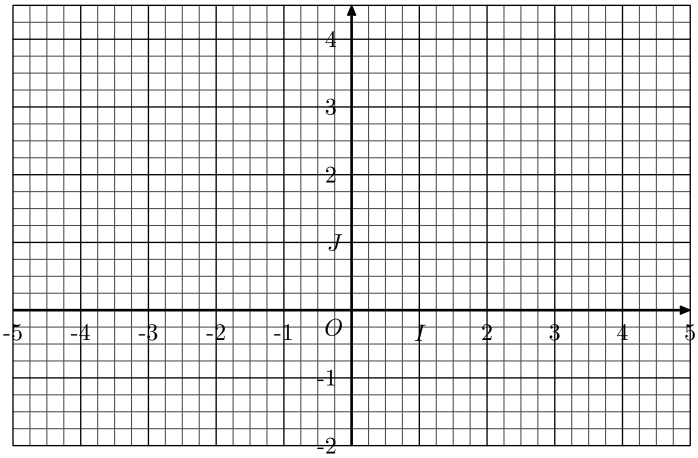
2. On a les coordonnées de vecteurs :
   - $\overrightarrow{DE}(x_E - x_D\,;y_E - y_D)$
     $= (-3-5\,;10-(-2)) = (-8\,;12)$
   - $\overrightarrow{FG}(x_G - x_F\,;y_G - y_F)$
     $= (3-(-3)\,;-11-(-2)) = (6\,;-9)$

   A l'aide des coordonnées de ces vecteurs, on remarque l'égalité vectorielle suivante :
   $\overrightarrow{DE} = -\dfrac{4}{3}\cdot\overrightarrow{FG}$
   Cette égalité signifie que ces deux vecteurs sont coli-

néaires : on en déduit que les droites (DE) et (FG) sont colinéaires.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(-2{,}5\,;0{,}5)$, $B(-1{,}5\,;2{,}5)$ et $C(0{,}5\,;-1)$.



1. Placer les points A, B et C dans le repère ci-dessous.

2. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. Placer le point D tel que : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
(On fera apparaître les traits de construction)

4. a. Donner les coordonnées du vecteur obtenu par la somme : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire, par le calcul, les coordonnées du point D.

Pour la suite, on admet que $D(1{,}5\,;1)$.

5. a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$.
   b. En déduire que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

6. $ABDC$ est-il un rectangle ? Justifier.

7. On donne $E\left(-\dfrac{3}{4}\,;4\right)$. Les points A, B et E sont-ils alignés ?

Correction 7

2. Déterminer par le calcul :
   - $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$
     $= (-1{,}5-(-2{,}5)\,;2{,}5-0{,}5) = (-1{,}5+2{,}5\,;2)$
     $= (1\,;2)$
   - $\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A\,;y_C-y_A)=(0{,}5-(-2{,}5)\,;-1-0{,}5)$
     $= (0{,}5+2{,}5\,;-1{,}5) = (3\,;-1{,}5)$

4. a. D'après les coordonnées de vecteurs obtenues à la question 2. :
   $\overrightarrow{AB}(1\,;2)$; $\overrightarrow{AC}(3\,;-1{,}5)$
   On en déduit les coordonnées du vecteur :
   $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}(1+3\,;2+(-1{,}5)) = (4\,;0{,}5)$
   b. Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnés :
   $\overrightarrow{AD}(x_D-x_A\,;y_D-y_A)$
   Par définition du point D, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$ s'exprime également par :
   $\overrightarrow{AD}(1+3\,;2+(-1{,}5)) = (4\,;0{,}5)$
   Par identification des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$, on obtient les deux égalités suivantes :

$x_D-x_A=4$	$y_D-y_A=0{,}5$
$x_D-(-2{,}5)=4$	$y_D-0{,}5=0{,}5$
$x_D+2{,}5=4$	$y_D=0{,}5+0{,}5$
$x_D=4-2{,}5$	$y_D=1$
$x_D=1{,}5$	

   Ainsi, le point D a pour coordonnées $(1{,}5\,;1)$.

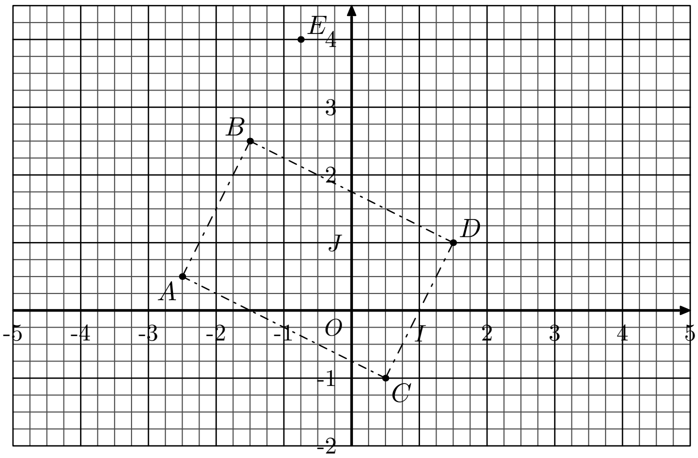
5. a. Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$:
   $\overrightarrow{CD}(x_D-x_C\,;y_D-y_C) = (1{,}5-0{,}5\,;1-(-1))$
   $= (1\,;1+1) = (1\,;2)$
   b. Par l'egalité de leurs coordonnées, on en déduit l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
   Ainsi, le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

6. Déterminons les distances suivantes :
   - $AD = \sqrt{\left(x_D-x_A\right)^2+\left(y_D-y_A\right)^2}$
     $= \sqrt{\left[1{,}5-(-2{,}5)\right]^2+\left(1-0{,}5\right)^2}$
     $= \sqrt{\left(1{,}5+2{,}5\right)^2+0{,}5^2} = \sqrt{4^2+0{,}25}$
     $= \sqrt{16+0{,}25} = \sqrt{16{,}25}$
   - $BC = \sqrt{\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2}$
     $= \sqrt{\left[0{,}5-(-1{,}5)\right]^2+\left(-1-2{,}5\right)^2}$
     $= \sqrt{\left(0{,}5+1{,}5\right)^2+\left(-3{,}5\right)^2} = \sqrt{2^2+\left(-3{,}5\right)^2}$
     $= \sqrt{4+12{,}25} = \sqrt{16{,}25}$

   Les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ ont la même mesure.
   Si un parallélogramme a ses diagonales de même mesure alors ce parallélogramme est un rectangle.
   Le quadrilatère $ABDC$ est un rectangle.

7. Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AE}$:
   $\overrightarrow{AE}(x_E-x_A\,;y_E-y_A) = \left(-\dfrac{3}{4}-(-2{,}5)\,;4-0{,}5\right)$
   $= \left(-\dfrac{3}{4}+\dfrac{10}{4}\,;\dfrac{8}{2}-\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{7}{4}\,;\dfrac{7}{2}\right)$
   On remarque que :
   $\dfrac{4}{7}\cdot\overrightarrow{AE}\left(\dfrac{4}{7}\times\dfrac{7}{4}\,;\dfrac{4}{7}\times\dfrac{7}{2}\right) = (1\,;2)$
   On en déduit l'égalité : $\overrightarrow{AB} = \dfrac{4}{7}\cdot\overrightarrow{AE}$
   Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires : les points A, B et E sont alignés.

Voici le graphique complété :



Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$.
L'unité de longueur est le cetimètre.

1. a. Placer le point $A(5\,;3)$.

   b. Par lecture graphique, donner les coordonnées de $\overrightarrow{IA}$

   c. En déduire la distance IA.

2. On considère le point $B\left(-1\,;\sqrt{21}\right)$.

   a. Prouver que A et B sont sur le cercle de centre I et de rayon 5.

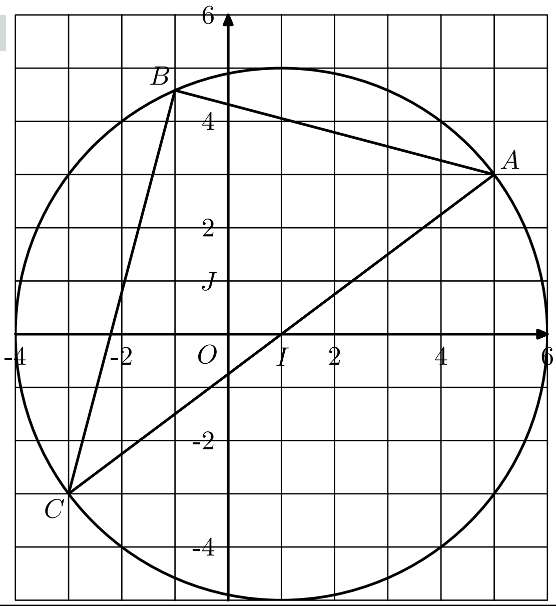
   b. Tracer ce cercle et placer le point B.

3. a. Placer le point C, symétrique de A par rapport à I.

   b. Prouver que le triangle ABC est rectangle en B.

Correction 8

1. a.



   b. Par lecture graphique, nous avons : $\overrightarrow{IA}(4\,;3)$

   c. On a la formule :
   $IA=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

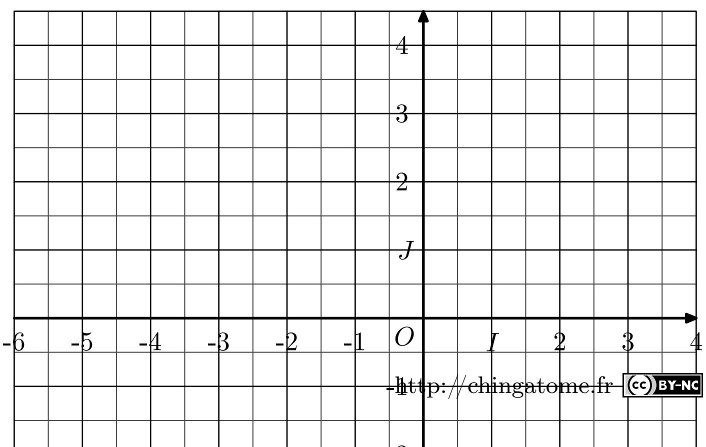
2. a. Le point A est à distance de $5\,cm$ du point I, il appartient donc au cercle de centre I et de rayon 5.
   Regardons la distance séparant le point B au point I :
   $$IB=\sqrt{(x_I-x_B)^2+(y_I-y_B)^2}$$
   $$=\sqrt{\big[1-(-1)\big]^2+\big(0-\sqrt{21}\big)^2}$$
   $$=\sqrt{2^2+\big(\sqrt{21}\big)^2}=\sqrt{25}=5$$
   Le point B appartient également au cercle.

3. a. Le point C, symétrique de A par rapport à I est placé de sorte que I soit le milieu de $[AC]$.

   b. $[AC]$ est un diamètre au cercle et B est un point.
   Si, dans un cercle, un triangle a ses trois sommets formant un diamètre et un point du cercle Alors le triangle est rectangle en ce point.

Exercice 9

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I\,;\,J)$:



1. Placer les trois points A, B, C dans le repère ci-dessous :

$A(3\,;\,-3)\quad ;\quad B(-4\,;3)\quad ;\quad C(-5\,;-1)$

2. Déterminer les coordonnées du milieu M du segment $[AB]$.

3. a. Déterminer les longueurs AB et MC

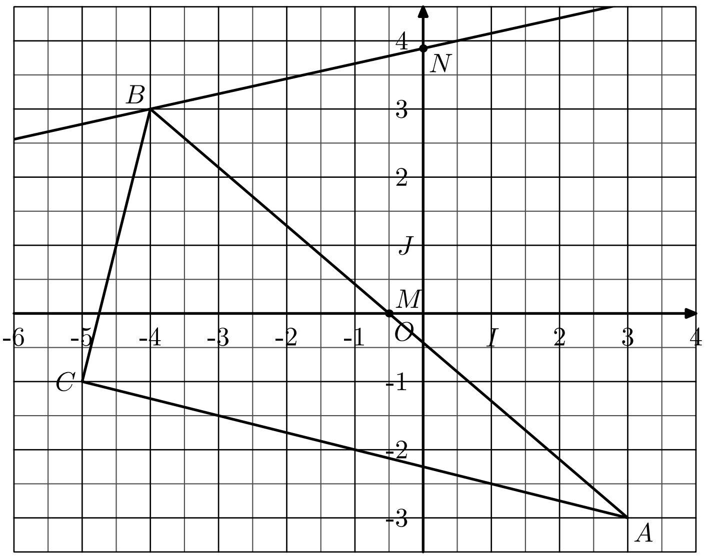
   b. Etablir que le triangle ABC est rectangle en C.

4. On note N le point d'intersection de l'axe des ordonnées avec la droite parallèle à (CM) passant par le point B.

   a. Placer le point N dans le repère.

   b. Déterminer les coordonnées du point N.

Correction 9



2. Les coordonnées du M, milieu du segment $[AB]$, sont données par :

$$M\Big(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\Big)=\Big(\frac{3+(-4)}{2}\,;\frac{-3+3}{2}\Big)$$
$$=\Big(-\frac{1}{2}\,;0\Big)$$

3. a. $$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
$$=\sqrt{(-4-3)^2+\big(3-(-3)\big)^2}=\sqrt{(-7)^2+(6)^2}$$
$$=\sqrt{49+36}=\sqrt{85}$$

$$MC=\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}$$
$$=\sqrt{\big(-0{,}5-(-5)\big)^2+\big(0-(-1)\big)^2}=\sqrt{4{,}5^2+1^2}$$
$$=\sqrt{\Big(\frac{9}{2}\Big)^2+1}=\sqrt{\frac{81}{4}+1}=\sqrt{\frac{85}{4}}=\frac{\sqrt{85}}{2}$$

b. $[CM]$ est la médiane du triangle ABC relative au côté $[BA]$ et mesure la moitié de la base associée :

$CM=\dfrac{1}{2}\cdot AB$

Si, dans un triangle, la médiane issue d'un sommet mesure la moitié du côté opposé alors ce triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.
Le triangle ABC est rectangle en C.

4. b. Le point N étant sur l'axe des ordonnées, il existe un réel β afin que ses coordonnées sont :

$N(0\,;\beta)$

On a les coordonnées des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{BN}(x_N-x_B\,;y_N-y_B)$
  $=(0-(-4)\,;\beta-3)=(4\,;\beta-3)$
- $\overrightarrow{CM}(x_M-x_C\,;y_M-y_C)$
  $=(-0{,}5-(-5)\,;0-(-1))=(4{,}5\,;1)$

Par définition du point N, les droites (BN) et (CM) sont parallèles. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{CM}$ colinéaires.
Ainsi, on a l'existence d'un réel k vérifiant la relation :

$\overrightarrow{CM}=k\cdot\overrightarrow{BN}$

Cette égalité entraîne l'égalité sur les coordonnées. Ainsi, on obtient une égalité sur les abscisses et sur les ordonnées :

- Sur les abscisses :
  $4{,}5=k\cdot 4$
  $k=\dfrac{4{,}5}{4}=\dfrac{9}{8}$
- Sur les ordonnées :
  $1=k\cdot(\beta-3)$
  $1=\dfrac{9}{8}\cdot(\beta-3)$
  $8=9\cdot(\beta-3)$
  $8=9\cdot\beta-27$
  $9\cdot\beta=8+27$
  $9\cdot\beta=35$
  $\beta=\dfrac{35}{9}$

Ainsi, le point N a pour coordonnées $N\Big(0\,;\dfrac{35}{9}\Big)$

